Section Littéraire

Mathématiques Générales

Deuxième Secondaire

Livre de l'élève   Premier Semestre

Auteurs

Mr. Kamal Yones Kabsha

Prof.Dr. Afaf Abo Elfotouh

M. Cerafiem Elias Skander

M. Magdy Abdelfatah Essafty

M. Ossama Gaber Abd-El-Hafez

طبعة ٢٠١٨ - ٢٠١٩ م

المواصفات الفنية

رقم الكتاب	١/٢/١١/١٥/١٠/٩٨٧
عدد الصفحات	١٦٠ صفحة
عدد الملازم	١٠ ملزمة
نوع ورق المتن ووزنه	٨٠ جم ابيض وود فري
نوع ورق الغلاف ووزنه	٢٠٠ جم كوشيه أبيض لامع
عدد الوان المتن	٤ ألوان
عدد الوان الغلاف	٤ ألوان



Première édition 2015/2016

Numéro de Dépôt 10555 / 2015

Numéro de Dépôt International 978 - 977 - 706 - 012 - 7

Avant-propos



Nous avons le plaisir de vous présenter ce manuel et la philosophie sur laquelle le contenue de ce livre a été fonder et que nous allons résumer dans ce qui suit :

1 Développé de l'unité de la connaissance et son intégration dans les mathématiques ainsi que l'intégration des notions et la liaison entre tous les différents domaines des mathématiques scolaires.

2 Donné à l'apprenant tout ce qui est opératoire des informations, des notions et des stratégies de résolution des problèmes.

3 Adopté l'accès des normes nationaux et les niveaux éducatifs de l'enseignement en Egypte à partir :

a) L'identification de ce qui est indispensable pour l'apprentissage des élèves et les motifs d'apprentissage.

b) La détermination précise des compétences attendues de l'élève.

Pour cela, on a axé sur les points suivants :

- l'apprentissage des mathématiques soit un but à atteindre continuellement par l'élève dans sa vie.
- la motivation de l'apprenant vers les mathématiques.
- la capacité du travail individuel et le travail en groupe.
- l'activité, l'assiduité et la créativité de l'apprenant.
- l'aptitude de l'apprenant à communiquer en langage mathématiques.

4 Suggéré des méthodes et des stratégies d'enseignement dans le livre du maitre.

5 Suggéré des activités variées convenables au contenue pour que l'apprenant choisisse l'activité qui lui convient.

6 Estimé les mathématiques et les apports des savants musulmans, arabes et étrangers pour le développement des mathématiques.

Ce manuel comporte trois domaines :

- L'algèbre, les relations et les fonctions. - Le calcul différentiel et intégral. - La trigonométrie.

★ On a répartis le manuel en des unités intégrés et interconnectés. Pour chacune de ces unités, il y a une introduction qui indique les compétences attendues de l'élève, un organigramme et les vocabulaires. Chaque unité comprend des leçons dont l'objectif est titré A apprendre et chacune des leçons commence par une idée principale qui est l'axe de l'apprentissage.
Le contenue scientifique est hiérarchisé de plus simple au plus compliqué et comporte des activités, adaptés au niveau de compétence des élèves et à leurs différences individuelles, ces activité visent à relier les mathématiques par les autres disciplines aussi bien que chercher des liaisons et des applications de la vie courante.
La rubrique Décelez l'erreur vise à remédier les erreurs communes des élèves. Le manuel actuel contient également des questions liées à l'environnement et son traitement.

★ Chaque leçon, contient des exemples variés, suivant les niveaux taxonomique et qui vont de plus facile au plus difficile, suivis par des exercices titrés Essayez de résoudre et enfin de la leçon des Exercices qui propose des problèmes variés abordent les notions et les compétences envisagées au cours de la leçon.

★ La parti illustrative de l'unité se termine par un Résumé comporte ce qu'il faut retenir de l'unité ensuit Exercices généraux sur les notions et les capacités acquises au cours de l'unité.

★ L'unité se termine par un Epreuve cumulative pour mesurer le niveau des compétences attendues acquises à la fin de l'unité.

★ La clôture du livre est par des Epreuves générales pour évaluer le niveau des compétences attendues acquises à la fin du semestre.

Enfin nous espérons que ce travail sera bénéfique pour vous et pour notre chère Egypte.
Et que Dieu soit derrière de l'intention, guide vers le droit chemin.

SOMMAIRE

Unité 1 Fonctions réelles et représentation graphique

Unité 2 Puissance, Logrithmes et Applications

SOMMAIRE

Unité 3 Limites

Unité 4 Trigonométrie

Épreuves générales et Réponse



Fonctions réelles et représentation graphique



Introduction de l'unité

Les fonctions ont plusieurs types et des applications importantes dans les différents domaines de la vie courante : l'astronomie, la médecine, l'économie, le sismographie, le géologie et le démographie. Les fonctions sont utilisées Pour calculer les variables météorologiques et la prévision météorologique. Elles servent également pour diagnostiquer les défauts cardiaques à l'aide de l'Électrocardiographie. Dans le domaine du commerce les fonctions servent n à réaliser les bénéfices maxima en étudiant les fonctions de bénéfice et de cout. On utilise les fonctions dans la médecine sportive pour déterminer le poids optimum [la taille en cm - 100] aussi pour déterminer le pourcentage de graisse corporelle. Elles sont utilisées dans l'industrie pour étudier l'effet de différentes variables sur la qualité de production.

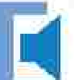
Le savant Suisse de mathématiques et physique, Leonhard Euler (1707-1783) fut l'un de plus important des savants de 18ième siècle, il a généralisé un multitude des expressions mathématiques comme la nation de la fonctions. Il est le premier qui utilisé la notation $y = f(x)$ pour exprimer la fonction en considérant que la fonction est une relation entre les éléments de deux ensembles de sorte qu'on puisse calculer la valeur d'une variable dépendant y à partir d'un autre variable indépendant choisit librement ce qui est enduit à transformer la géométrie en relations arithmétiques ainsi que les rapports trigonométriques, connues par les pharaons et les babéliens et maîtrisées par les arabes, en fonctions trigonométriques.

Dans cette unité, on va aborder des différentes formes des fonctions réelles : représentation graphique, transformation le su représentation, logiciels, utiliser les fonctions réelles pour résoudre des problèmes mathématiques et des problèmes de la vie courante dans les différents domaines.

Compétences attendues de l'unité

Après l'étude de l'unité, il est prévu que l'élève soit capable de :

- Reconnaître le concept de la fonction réelle.
- Déterminer l'ensemble de définition l'ensemble d'arrivée et l'ensemble image d'une fonction réelle.
- Déduire le sens de variation d'une fonction réelle (croissante, décroissante ou constante).
- Identifier les fonctions paires et les fonctions impaires et les distinguer.
- Identifier les fonctions polynômes.
- Tracer les courbes représentatives des fonctions: (carré – valeur absolue – cubique – rationnelle et déduire les propriétés de chacune d'elles.
- Déduire l'effet des transformations $f(x \pm a) \pm b$, $a f(x \pm b) \pm c$ sur les fonctions précédemment citées.
- Appliquer les transformations précédentes sur le tracé des courbes des fonctions réelles.
- Résoudre des équations de la forme : $|x + b| = c$ $|ax + b| = |dx + c$
- Résoudre des inéquations de la forme: $|ax + b| < c$ $|ax + b| \leq c$ $|ax + b| > c$ $|ax + b| \geq c$
- Utiliser les fonctions réelles pour résoudre des problèmes mathématiques et des problèmes de la vie quotidienne dans les différents domaines.
- Relier les connaissances étudiées sur transformations précédentes aux fonctions trigonométriques sous forme d'activités.
- Utiliser le logiciel Geogebra
- pour représenter les fonctions graphiquement et voir l'effet des transformations sur ces fonctions.



Vocabulaires de base

- Fonction réelle
- Ensemble de définition
- Ensemble d'arrivée
- Ensemble image
- Une droite vertical
- Fonction définie par morceaux
- Composition de fonctions
- Fonction paire
- Fonction impaire
- Sens de variation d'une fonction
- Fonction croissante
- Fonction décroissante
- Fonction constante
- Fonction polynôme
- Fonction valeur absolue (Module)
- Fonction du second degré
- Fonction rationnelle
- Asymptote
- Transformation
- Translation
- Symétrie
- Dilatation
- Solution graphique



Leçons de l'unité

Leçon (1 - 1): Fonctions réelles.

Leçon (1 - 2): Sens de variation des fonctions.

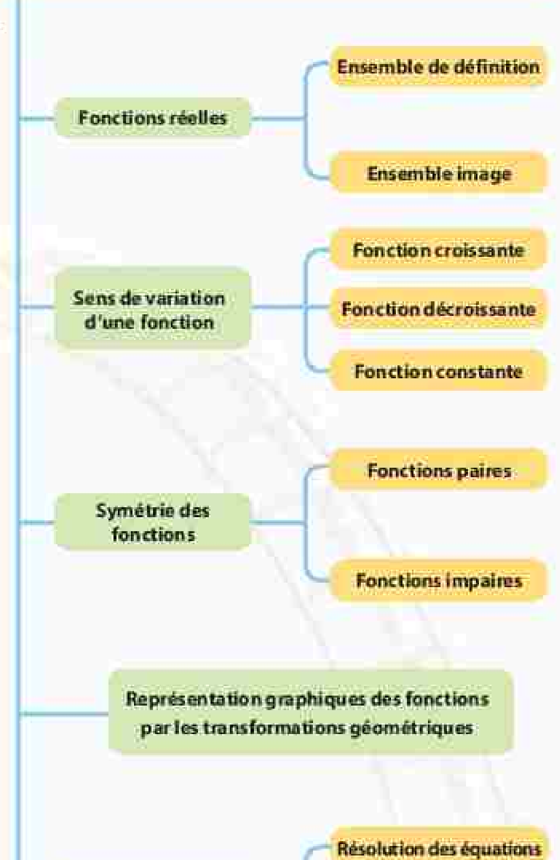
Leçon (1 - 3): Fonctions paires et fonctions impaires.

Leçon (1 - 4): Représentations graphiques des fonctions

Leçon (1 - 5): Equations et inéquations



Organigramme de l'unité



Aides pédagogiques

Calculatrice graphique – Logiciels : de graphisme Geogebra

Unité 1

1 - 1 Fonctions réelles



Allez apprendre

- La notion de fonction réelle.
- Le test de la droite verticale.
- La fonction définie par morceaux.
- L'identification de l'ensemble de définition et l'ensemble image de la fonction.
- Les opérations sur les fonctions.



Vocabulaires de base

- Fonction
- Ensemble de définition
- Ensemble d'arrivée
- Ensemble image
- Diagramme sagittale
- Diagramme cartésien
- Droite verticale
- Définition sur plusieurs intervalles (par morceaux).



Aides pédagogiques

- Calculatrice
- Logiciels de graphisme



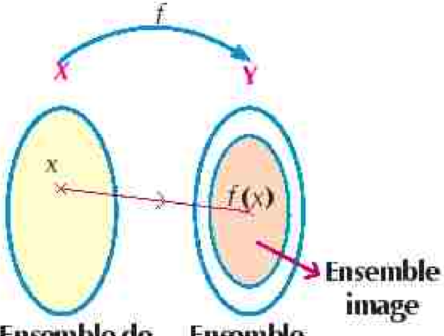
Découvrir

Vous avez déjà étudié la notion de fonction. C'est une relation entre deux ensembles non vides X et Y tels que à chaque élément de l'ensemble X on associe une seule image de l'ensemble Y.

La fonction est notée par l'un des symbole : f, g, h, ...

La fonction f s'écrit de l'ensemble X vers l'ensemble Y comme suit :

$f: X \longrightarrow Y$ **qui se lit f est une fonction de X vers Y. On remarque que:**



1- Pour tout élément $x \in X$ il existe un élément unique $y \in Y$ tel que $y = f(x)$

2- L'ensemble X est appelé l'ensemble de définition de la fonction et l'ensemble Y est appelé l'ensemble d'arrivée de la fonction.

3- L'ensemble $\{y : y = f(x) ; x \in X\}$ est appelé l'ensemble image de la fonction.



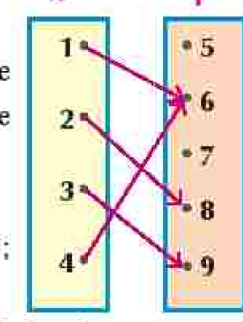
Définition 1

Fonction réelle

Une fonction est dite une fonction réelle si son ensemble de définition et son ensemble d'arrivée sont des parties de nombres réelle $\mathbb{R}$



Exemple



(1) La relation de l'ensemble X vers l'ensemble Y indiquée par le diagramme sagittal ci-contre représente une fonction.

ensemble de définition = {1 ; 2 ; 3 ; 4}

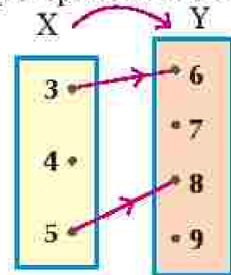
L'ensemble Y est son ensemble d'arrivée = {5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9}

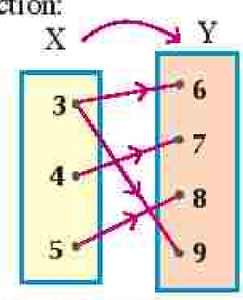
L'ensemble {6 ; 8 ; 9} est l'ensemble image de la fonction.

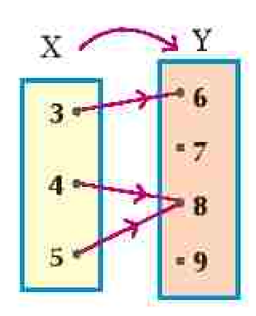
Essayez de résoudre

(1) Précisez, quels sont ceux des diagrammes sagittaux ci-dessous qui représentent une fonction et ceux qui ne représentent pas de fonction. Puis écrivez l'ensemble de définition et l'ensemble image

de ceux qui représentent une fonction:



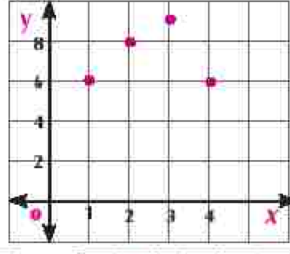




La représentation graphique des fonctions

Si f: X ⟶ Y alors l'ensemble des couples (paires ordonnés) qui vérifie la règle de la fonction est appelé le graphe de la fonction est noté $G = \{ (x ; y): x \in X ; y \in Y ; y = f(x) \}$

Si on représente cet ensemble dans un repère cartésien, on obtient la courbe représentative de la fonction. Dans l'exemple (1) le graphe de $f = \{ (1; 6), (2; 8), (3; 9), (4; 6) \}$.



Remarquez que :

1- La représentation graphique de la fonction est un ensemble discontinu des points.

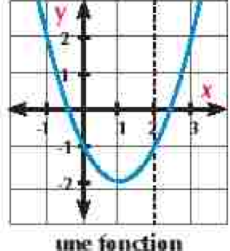
2- La droite verticale passant par les éléments de l'ensemble de définition coupe la représentation graphique en un seul point.



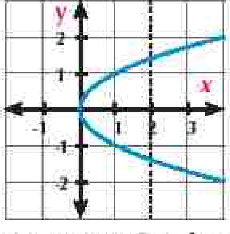
A apprendre

Test de la droite verticale

Si la droite verticale en tout élément de l'ensemble de définition passe par un seul point des points représentants la relation. La relation est donc est une fonction de X ⟶ Y



une fonction



n'est pas une fonction



Exemple

Déterminé les relations qui représentent des fonctions

(2) Dans chacune des figures suivantes, montre si Y représente une fonction en x ou non.

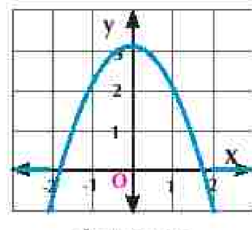


Figure (1)

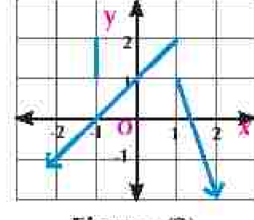


Figure (2)

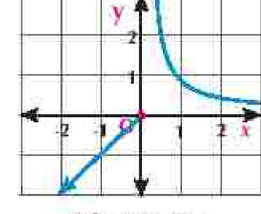


Figure (3)

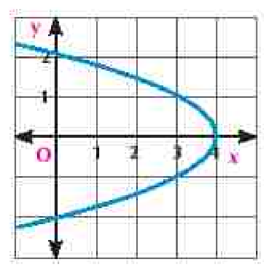


Figure (4)



Solution

La figure (1) représente une fonction

La figure (2) ne représente pas une fonction car la droite verticale passant par le point (1 ; 0) coupe la courbe en deux points.

La figure (3) représente une fonction.

La figure (4) ne représente pas une fonction car il existe au moins une droite verticale qui

coupe la courbe en plus qu'un point.

Essayez de résoudre

(2) Parmi les figures suivantes, laquelle représente une fonction de X ⟶ Y Pourquoi?

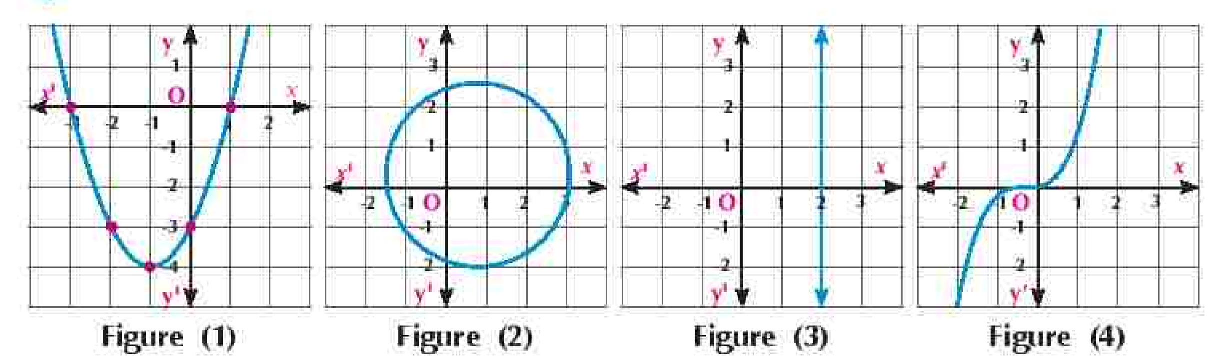


Figure (1) Figure (2) Figure (3) Figure (4)

Exemple

Détermination de l'ensemble image d'une fonction

(3) **a** Soit f: [1; 5] ⟶ R où $f(x) = x + 1$

Tracez la courbe représentative de la fonction f, en déduire l'ensemble image de f

b Soit g : [1; 5[⟶ R où $g(x) = x + 1$

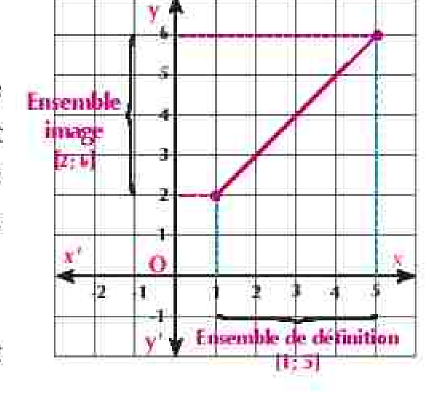
Tracez la courbe représentative de la fonction g, en déduire l'ensemble image de g.

Solution

a La fonction f est une fonction affine f son ensemble de définition est [1; 5] Elle est représentée graphiquement par un segment de droite dont les extrémités sont les deux points de coordonnées (1; $f(1)$) et (5; $f(5)$) ou les deux points de coordonnées (1; 2), (5; 6).

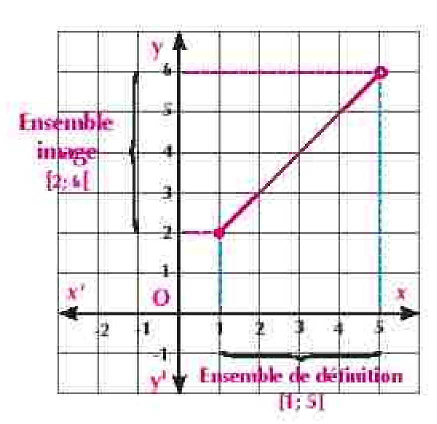
L'ensemble image de f = [2; 6]

C'est l'ensemble des ordonnées des points appartenant à la courbe de la fonction.



b La fonction g est une fonction affine g son ensemble de définition est [1; 5[, $g(x) = f(x)$ pour $x \in$ [1; 5[Elle est représentée graphiquement par un segment de droite dont l'une de ses extrémités est le points de coordonnées (1 ; 2), on élimine le point de coordonnées (5 ; 6) en posant un rond vide à l'autre extrémité du segment.

L'ensemble image de g = [2; 6[



Essayez de résoudre

(3) (a) Soit $f : [1 ; \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, où $f(x) = 1 - x$

Tracer la courbe représentative de la fonction f, en déduire l'ensemble image de f.

(b) Soit $g :]-\infty ; -1[\longrightarrow \mathbb{R}$, où $g(x) = 1 - x$

Tracer la courbe représentative de la fonction g, en déduire l'ensemble image de g.

Fonction définie par morceau

Pour diminuer la consumation de l'électricité, de l'eau et de gaz, on calcule la valeur de la consumation mensuelle suivant des tranches particulières qui relient la quantité de consommation par sa valeur.



Travail coopératif

Le tableau suivant indique les tarifs, en piastres, des tranches de la consommation mensuelle du gaz naturel. Avec votre camarade, calculez les tarifs, en piastres, de la consommation d'une maison pour les quantités suivantes:

Consommation en mètres cubes	Tarifs en piastres
Jusqu'à 25	40
Plus que 25 Jusqu'à 50	100
Plus que 50	150

1- 30 mètres cubes par mois. **2-** 60 mètres cubes par mois.

[Les taxes et les frais de services sont ajoutés après avoir calculé la valeur de la consommation mensuelle]

Remarquez que: On peut exprimer le tableau précédent par la fonction f pour calculer les tarifs de consumation mensuel de x mètre cube où $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} 40\,x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 25 \\ 100\,x - 1500 & \text{si } 25 < x \leqslant 50 \\ 150\,x - 4000 & \text{si } x > 50 \end{cases}$$

Cette fonction est une fonction réelle définie par morceaux (définie sur plusieurs intervalles)



A apprendre

La fonction définie par morceaux est une fonction réelle, pour quelques parties de son ensemble de définition sont attribués des règles de définitions différentes.

Essayez de résoudre

(4) En utilisant la fonction précédentes, vérifiez votre réponse avec vos camarades, puis calculez les tarifs de la consommation mensuelle de gaz pour les quantités suivantes:

(a) 15 mètres cubes (b) 40 mètres cubes (c) 54 mètres cubes

Représentation de la fonction définie par morceaux :



Exemple

(4) Soit $f(x) = \begin{cases} 3 - x & \text{si } -2 \leqslant x < 2 \\ x & \text{si } 2 \leqslant x \leqslant 5 \end{cases}$

Tracez la courbe représentative de la fonction, en déduire l'ensemble définition et l'ensemble image de la fonction.

Solution

La fonction est définie par morceaux sur deux intervalles, elle est attribuée par deux règles de définitions.

La première : $f_1(x) = 3 - x$ sur l'intervalle $[-2; 2[$

C'est une fonction affine qui est représentée par un segment de droite dont les extrémités sont les points de coordonnées $(-2; 5)$ et $(2; 1)$ **en posant un rond vide à l'extrémité du segment de coordonnées (2; 1).** car $2 \notin [-2; 2[$ (voir la figure ci-contre)



La deuxième : $f_2(x) = x$ si $2 \leqslant x \leqslant 5$ ou sur l'intervalle $[2; 5]$

C'est une fonction affine qui est représentée par **un segment de droite dont les extrémités sont les** Points de coordonnées $(2; 2)$, $(5; 5)$. Donc l'ensemble définition de

$f = [-2; 2[\cup [2; 5] = [-2; 5]$

Du graphique, on déduit que :

L'ensemble définition de $f = [-2; 5]$

L'ensemble image de $f =]1; 5]$

Remarque

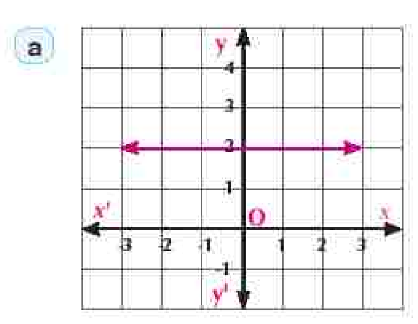
Dans la représentation graphique de la fonction f **ensemble définition de = [a; b] ensemble image de f = [c; d]**

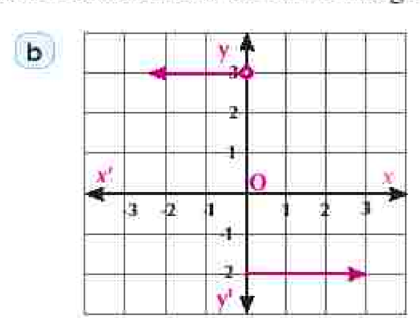
Essayez de résoudre

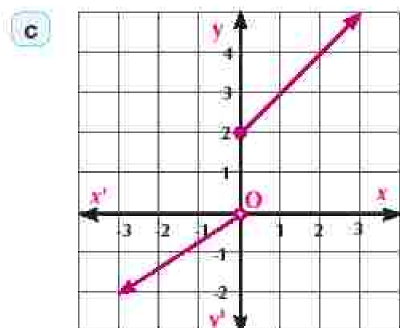
5. Soit $f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si} \quad -2 \leqslant x < 0 \\ x + 1 & \text{si} \quad x \geqslant 0 \end{cases}$

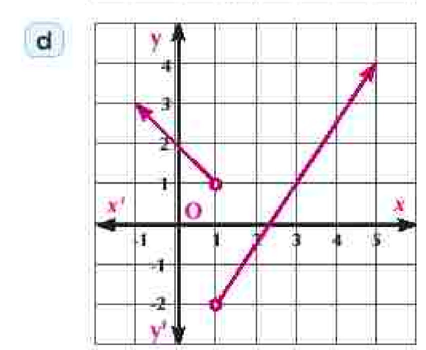
Tracez la courbe représentative de la fonction f. Du graphique, déduisez l'ensemble image de la fonction.

6. Dans chacune des figures suivantes, déduisez l'ensemble définition et l'ensemble image de f.

a 

b 

c 

d 

Déterminé de l'ensemble définition d'une fonction réelle et les opérations

On peut déterminer l'ensemble définition d'une fonction réelle à partir de sa règle de définition ou de sa représentation graphique.



Exemple

Détermination de l'ensemble définition d'une fonction

(5) Determinez l'ensemble définition de la fonction:

(a) $f_1(x) = \dfrac{x+3}{x^2-9}$ (b) $f_2(x) = \sqrt{x-3}$

(c) $f_3(x) = \sqrt[3]{x-5}$ (d) $f_4(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3-x}}$

> **Rappel**
>
> **L'ensemble de définition d'une fondion polynôme est l'ensemble des nombres réblles ou une partie de cet ensemble**

Solution

(a) La fonction f_1 n'est pas indéfinie lorsque le dénominateur = 0 pour cela $x^2 - 9 = 0$ alors $x = \pm 3$ l'ensemble définition de f_1 est donc $\mathbb{R} - \{-3; 3\}$

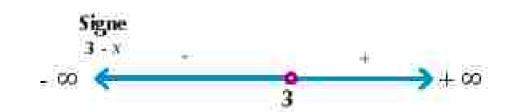
(b) La fonction f_2 est définie lorsque le radicale est positive ou nul, c.à.d. toutes les valeurs de x pour lesquelles $x - 3 \geqslant 0$

Signe $x - 3$: $-$ | 3 | $+$

$\because$ $x - 3 \geqslant 0$ $\therefore x \geqslant 3$ $\therefore$ l'ensemble définition de $f_2 = [3\ ; +\infty[$

(c) $f_3(x) = \sqrt[3]{x-5}$, l'indice de la racine est nombre impaire l'ensemble définition de $f_3 = \mathbb{R}$

(d) La fonction f_4 est définie lorsque $3 - x > 0$
L'ensemble définition de f_4 $]-\infty; 3[$



Remarquez que :

Soient $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$ où $n \in \mathbb{Z}^+$, $n > 1$, $g(x)$ est un polynôme

I) Si n est un nombre impair alors l'ensemble définition de $f = \mathbb{R}$

II) Si n est un nombre pair alors l'ensemble définition de f est les valeurs de x pour lesquelles $g(x) \geqslant 0$

Essayez de résoudre

(7) Déterminez l'ensemble définition de chacune des fonctions réelles définies par les règles suivantes:

(a) $f_1(x) = \dfrac{2x+3}{x^2-3x+2}$ (b) $f_2(x) = \sqrt{x-3}$

(c) $f_3(x) = \sqrt[3]{x-5}$ (d) $f_4(x) = \dfrac{5}{\sqrt{x+4}}$

Pensé critique: Trouvez la valeur de k, sachant que l'ensemble définition de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{2}{x^2-6x+k}$ est $\mathbb{R} - \{3\}$.



Activité

Opération sur les fonctions

Soient f_1 et f_2 deux fonctions dont les ensembles de définition sont D_1 et D_2 respectivement, alors:

1 $(f_1 \pm f_2)(x) = f_1(x) \pm f_2(x)$, l' ensemble définition de $(f_1 \pm f_2)$ est $D_1 \cap D_2$

2 $(f_1 \cdot f_2)(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$, l' ensemble définition de $(f_1 \cdot f_2)$ est $D_1 \cap D_2$

3 $(\frac{f_1}{f_2})(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ où $f_2(x) \neq 0$ l' ensemble définition de $(\frac{f_1}{f_2})$ est $(D_1 \cap D_2) - Z(f_2)$

Où $Z(f_2)$ est l'ensemble des zéros de f_2

On remarque que: dans tous les cas précédents, l'ensemble définition de la fonction obtenue est égale à l'intersection des ensembles de définition de f_1 et f_2 privé des valeurs qui rend $f_2(x) = 0$ c' est dans le cas de la division.

Soient $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ où $f_1(x) = 3x - 1$

$f_2 : [-2; 3] \longrightarrow \mathbb{R}$ où $f_2(x) = x - 3$

I) Trouvez la règle et l'ensemble définition de chacune des fonctions suivantes:

a $(f_1 + f_2)$ b $(f_1 - f_2)$ c $(f_1 \cdot f_2)$ d $(\frac{f_1}{f_2})$

II) Calculez la valeur numérique, si cela est possible, pour chacune des fonctions suivantes :

a $(f_1 + f_2)(3)$ b $(f_1 - f_2)(-3)$ c $(f_1 \cdot f_2)(-2)$

d $(f_1 \cdot f_2)(2)$ e $(\frac{f_1}{f_2})(4)$ f $(\frac{f_1}{f_2})(-1)$

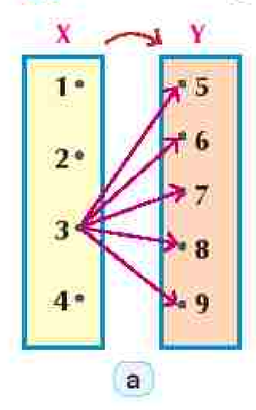


Exercices 1 - 1

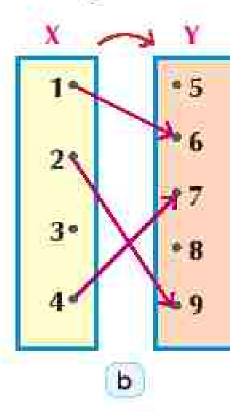


Choisir la bonne réponse parmi les réponses proposées:

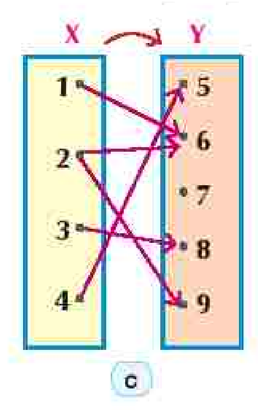
1 Parmi les diagrammes sagittaux suivants, la relation qui représente une fonction est :



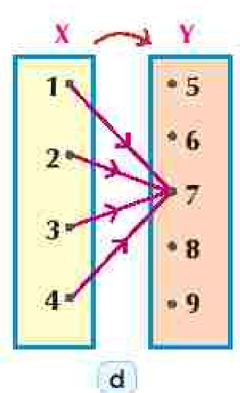
a



b

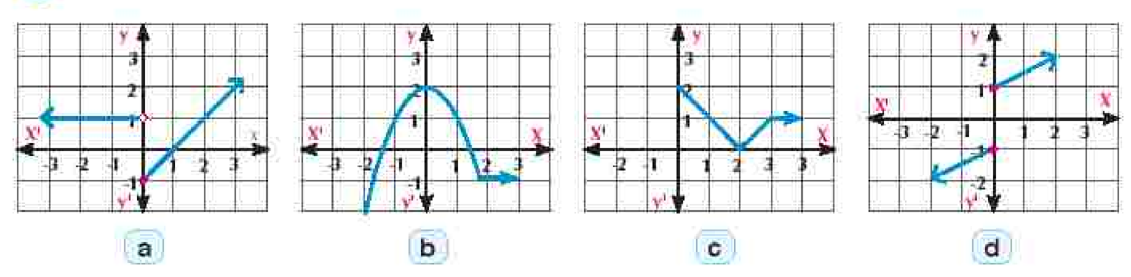


c



d

2. Parmi les diagrammes cartésiens suivants, la relation qui ne représente pas une fonction est :



3. Laquelle des relations suivantes ne représentent pas de fonction:

a) $\{(1; 3), (3; 5), (5; 7), (7; 9)\}$ b) $\{(2; 3), (3; 4), (2; 1), (3; 5)\}$

c) $\{(0;3), (1; 3), (2; 3), (3;3)\}$ d) $\{(-3; 5), (-1; 5), (0; 5), (2; 5)\}$

Répondre à ce qui suit:

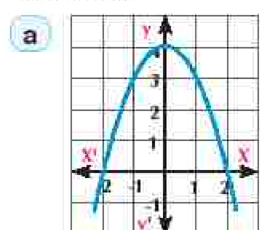
4. Soient $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ et $X = \{1; 2; -2; -3\}$

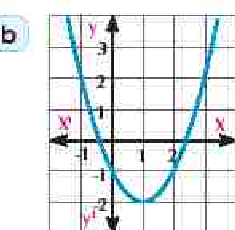
Trouvez l'ensemble image de f sachant que $f(x) = 5x - 3$

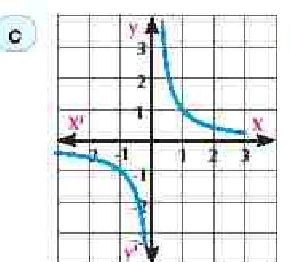
5. Soient $g: \{1; 2; 3; 4; 5\} \longrightarrow \mathbb{Z}^-$ où $g(x) = 4x - 3$

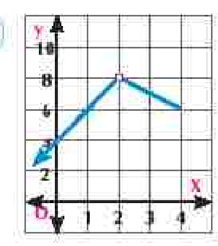
a) Trouvez l'ensemble image de g b) Si $g(k) = 17$ trouvez la valeur de k

6. Dans chacune des figures suivantes, déduire l'ensemble définition et l'ensemble image de fonction:

a) 

b) 

c) 

d) 

7. Déterminez l'ensemble de définition de la fonction f définies par $f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } 2 < x \leqslant 4 \\ -1 & \text{si } -2 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases}$

Puis tracez la courbe représentative de la fonction f. Du graphique, déduisez l'ensemble image.

8. Tracez la courbe représentative de la fonction f telle que :

$$f(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{si } x > 2 \\ 2x - 1 & \text{si } x < 2 \end{cases}$$

Du graphique, déduire l'ensemble image de la fonction.

9. Soit $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{si } -2 \leqslant x < 0 \\ 1 - x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 4 \end{cases}$ Tracez la courbe représentative de la fonction f

Du graphique, déduisez l'ensemble image de la fonction

10 Soit $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si} \quad -3 \leqslant x < 0 \\ x+2 & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 3 \end{cases}$ Tracez la courbe représentative de la fonction f

Du graphique, déduisez l'ensemble image de la fonction

11 So it: $f(x) = \begin{cases} -4x+3 & \text{si } x < 3 \\ -x^3 & \text{si } 3 \leqslant x \leqslant 8 \\ 3x^2+1 & \text{si } x > 8 \end{cases}$

Trouvez :

a) $f(2)$ b) $f(3)$ c) $f(10)$

12 **En lien avec la commerce:** La fonction f, telle que :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{5}{2}x & \text{Si } 0 \leqslant x \leqslant 5000 \\ 2x + 2500 & \text{Si } 5000 < x \leqslant 15000 \\ \frac{3}{2}x + 10000 & \text{Si } 15000 < x \leqslant 60000 \end{cases}$$

représente la somme, en L.E reçue par l'une des sociétés de la distribution d'un type des appareils éléctriques où x est le nombre d'appareil. Trouvz :

a) $f(5000)$ b) $f(10000)$ c) $f(50000)$

13 **En lien avec la géométrie :** Soit p le périmètre d'un carré de coté ℓ Ecrire le périmètre en fonction de la longueur de son coté $p(\ell)$ puis trouver :

a) $p(3)$ b) $p(\frac{15}{4})$

14 **En lien avec la géométrie :** Soit A l'aire d'un cercle de rayon . Ecrire l'aire en fonction de la longueur de son rayon $A(r)$ puis trouver $A(\frac{1}{2})$ et $A(5)$.

15 Déterminez l'ensemble de définition de chacune des fonctions réelles suivantes :

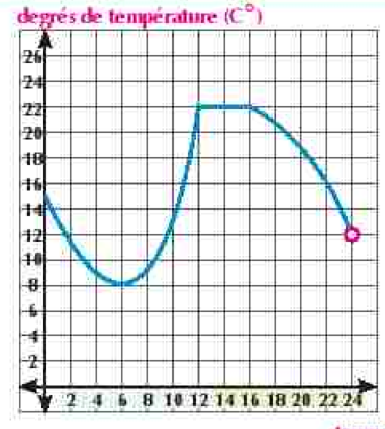
a) $f(x) = \frac{x+3}{x^2-5x+6}$ b) $f(x) = \frac{x+1}{x^3+1}$

c) $f(x) = \sqrt{x-2}$ d) $f(x) = \sqrt{4-x}$

Unité 1

Sens de variation des fonctions 1 - 2

discutez et réflichissez



Le graphique ci - contre indique les températures enregistrées au Caire pendant un jour. Observez la variation de température par rapport au temps, puis déterminez

a) Les intervalles de décroissance de degrés de température.

b) Les intervalles de croissance de degrés de température.

c) Les intervalles où la variation de degrés de température est constante.

Les propretés de la courbe aident à étudier la variation de la fonction pour déterminer les intervalles de croissance, de décroissance et les intervalles où la fonction est constante. Autrement dit, c'est l'étude de la monotonie de la fonction ou son sens de variation.



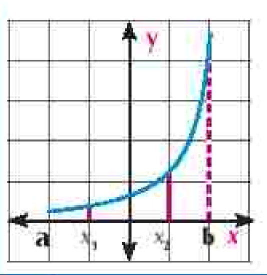
A apprendre

Fonction croissante:

On dit que la fonction f est **croissante** sur un intervalle]a ; b[

si pour tout $x_1 \in$]a; b[; $x_2 \in$]a; b[**si** $x_2 > x_1$

alors : $f(x_2) > f(x_1)$

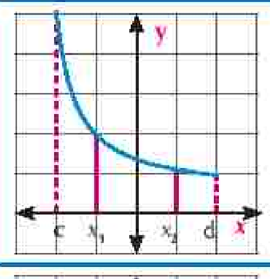


Fonction décroissante:

On dit que la fonction f est **décroissante** sur un intervalle]c ; d[

si pour tout $x_1 \in$]c; d[; $x_2 \in$]c; d[**si** $x_2 > x_1$

alors : $f(x_2) < f(x_1)$

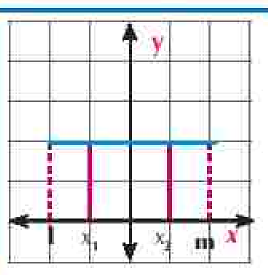


Fonction constante:

On dit que la fonction f est **constante** sur un intervalle]ℓ ; m[

si $x_1 \in$]ℓ; m[; $x_2 \in$]ℓ; m[**si :** $x_2 > x_1$

alors : $f(x_2) = f(x_1)$



Allez apprendre 

- Sens de variation des fonctions.
- Utilisation du logiciel (Geogebra) pour tracer les courbes représentatives des fonctions

Vocabulaires de base 

- Sens de variation
- Fonction croissante
- Fonction décroissante
- Fonction constante

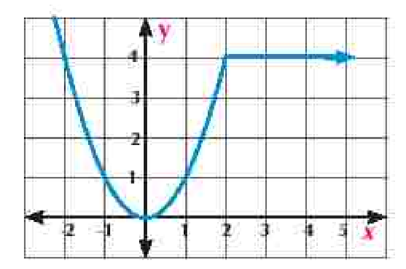


Aides pédagogiques

- Calculatrice scientifique
- Logiciels de graphisme.



Exemple

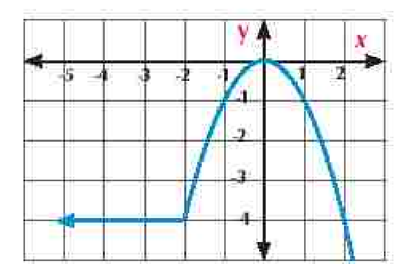


(1) Etudiez le sens de variation de la fonction représentée dans la figure ci-contre.

Solution

- La fonction est décroissante sur l'intervalle $]-\infty\ ;0[$
- La fonction est croissante sur l'intervalle $]0\ ;2[$
- La fonction est croissante sur l'intervalle $]2\ ;+\infty\ [$

Essayez de résoudre

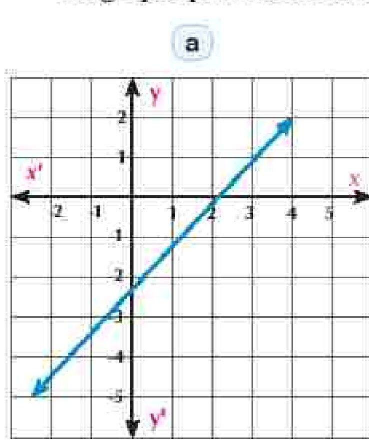


(1) Dans la figure ci-contre:
Etudiez les intervalles où la fonction est croissante, les intervalles où la fonction est décroissante et les intervalles où la fonction est constante.

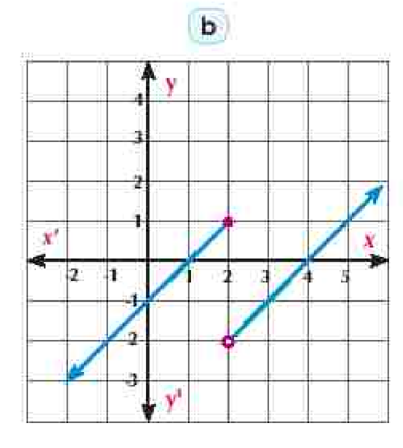
Exemple

(2) Les figures suivantes montrent les représentations graphiques de quelques fonctions.
Du graphique, déduire l'ensemble image et étudier le sens de variation de chaque fonction

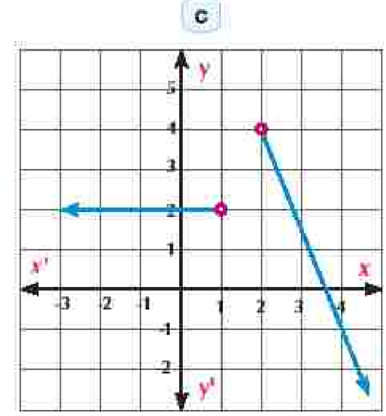
a



b



c



Solution

a L'ensemble définition de $f = \mathbb{R} =]-\infty\ ;+\infty\ [$, L'ensemble image de $f =]-\infty\ ;+\infty\ [$
la fonction est croissante sur $]-\infty\ ;+\infty[$

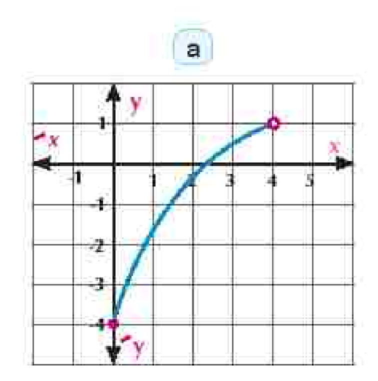
b L'ensemble définition de $f =]-\infty\ ;2] \cup]\ 2\ ;+\infty\ [=]-\infty\ ;+\infty\ [$
la fonction est croissante sur $]-\infty\ ;2[$ et la fonction est croissante sur $]\ 2\ ;+\infty\ [$

c L'ensemble définition de $f =]-\infty\ ;1[\cup]\ 2\ ;+\infty\ [$, L'ensemble image de $f =]-\infty\ ;4[$
la fonction est constante sur $]-\infty\ ;1[$, la fonction est décroissante sur $]\ 2\ ;+\infty\ [$

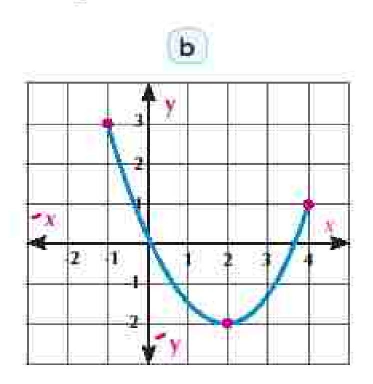
Essayez de résoudre

(2) Dans chacune des figures suivantes, déduire l'ensemble définition, l'ensemble image et étudier le sens de variation de chaque fonction :

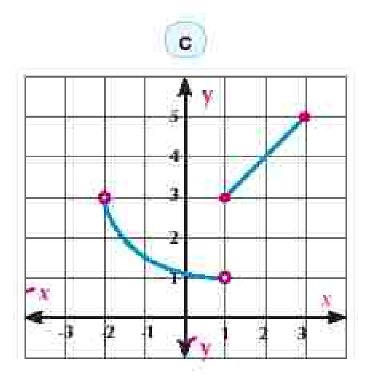
a



b



c



Utilisation des logiciels pour étudier quelques propriétés des fonctions

Les logiciels qui servent à tracer les courbes des fonctions sont multiples *GeoGebra* est l'un de plus utile pour la tablette et l'ordinateur.



Activité

Utilisation du logiciel *GeoGebra* pour construire des transformations des courbes des fonctions
En Utilisation du *GeoGebra* représente graphiquement la fonction : $f(x) = x^3 - 3x + 2$
Du graphique : trouver l'ensemble définition et celui d'image .

Pour représenter la fonction graphiquement, suivez les étapes suivantes :

1- Ouvrez la fenêtre algébrique et celle de graphique du logiciel (*GeoGebra*) puis appuyez sur *Graphics* et choisissez pour retrouver la fenêtre indiquée dans **la Figure (1)**.

Fenêtre algébrique

Fenêtre graphique

Fig (1)

2- Dans la fenêtre algébrique, écrivez la règle de la fonction :
$f(x) = x^3 - 3x + 2$ en utilisant la touche (Insérer) comme il est indiqué ultérieurement :



Puis appuyez sur le bouton La courbe apparaitra dans la partie graphique de l'écran, et la règle apparaîtra dans la partie algébrique **Figure (2)**

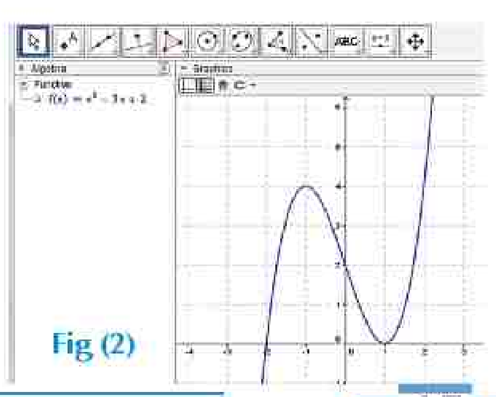


Fig (2)

3- Pour déterminer un point de la courbe choisissez  de la barre outils puis choisissez un nouveau point de la fenêtre. Déplacez le curseur jusqu' à ce que vous arriviez au point souhaité sur la courbe et cliquez sur insérer pour faire apparaitre le point sur la courbe. Les coordonnées du point apparaissent dans la fenêtre algébrique comme dans la figure (3).

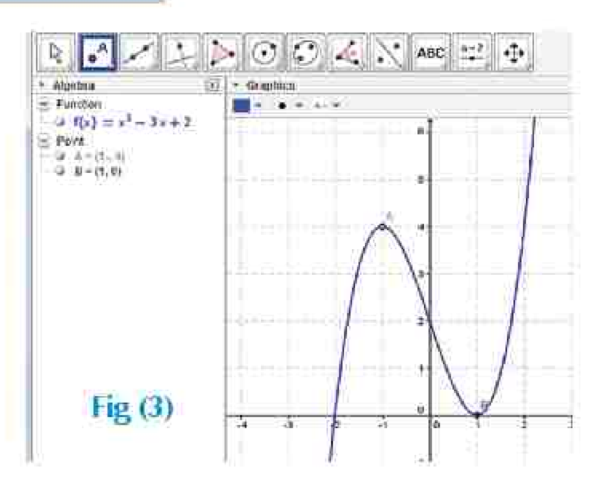
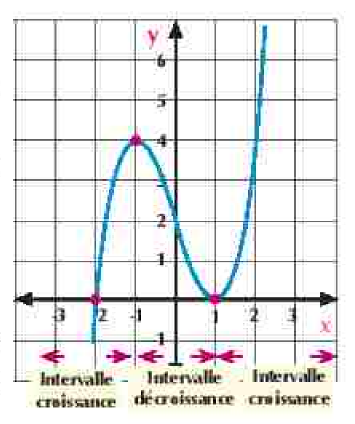


Fig (3)

Da la représentation graphique, on trouve que :

a L'ensemble définition de la fonction f =] - ∞ ; +∞ [, l'ensemble image de la fonction f =] - ∞; +∞[

b La fonction est croissante sur]- ∞ ; -1[, décroissante sur]-1 ; 1[, croissante sur]1 ; + ∞[



Application

En utilisant le logiciel *GeoGebra* représente graphiquement la fonction $f(x) = 3x - x^3$ Du graphique : déterminez le sens de variation de la fonction.



1 Les figures suivantes montrent les représentations graphiques de quelques fonctions. Du graphique, déduire l'ensemble image et étudier le sens de variation de chaque fonction:

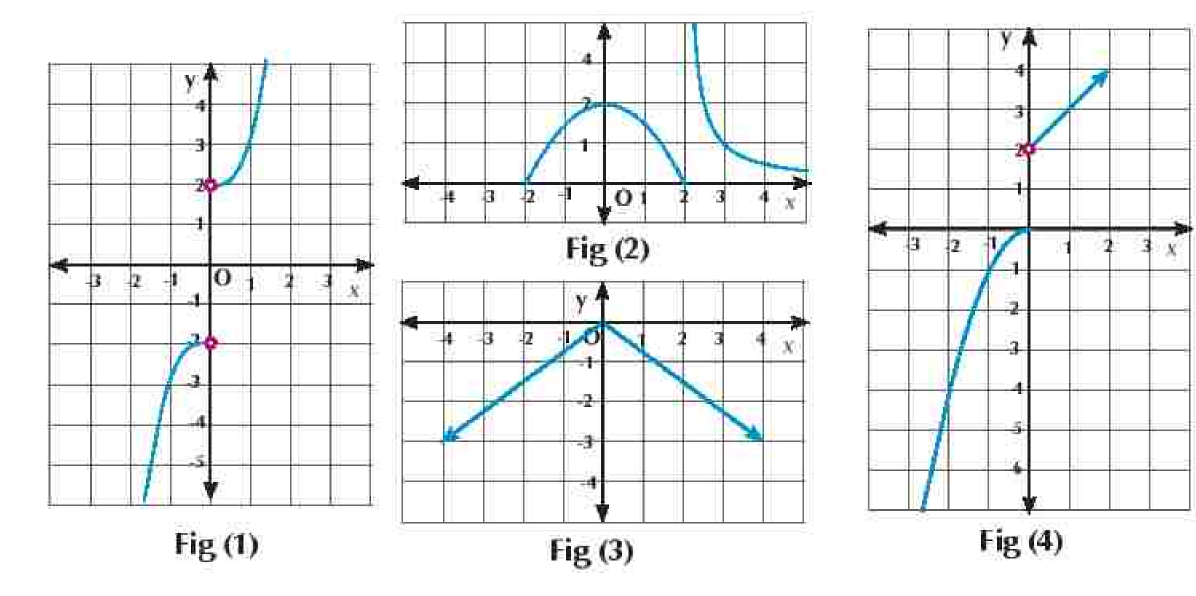
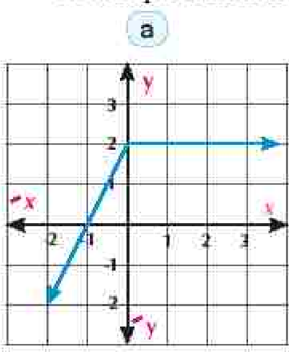


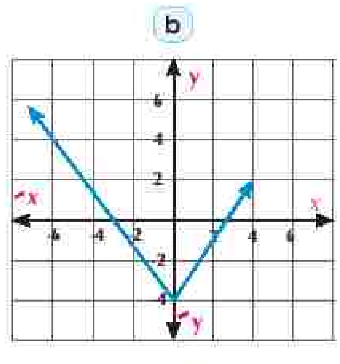
Fig (1) Fig (2) Fig (3) Fig (4)

(2) Les figures suivantes montrent les représentations graphiques de quelques fonctions. Du graphique, déduire l'ensemble définition, l'ensemble image et étudier le sens de variation de chaque fonction :

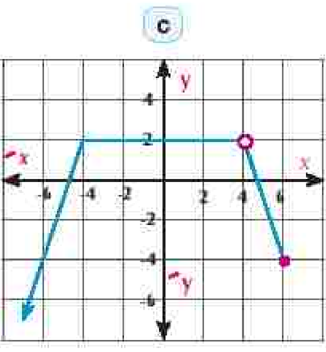
a



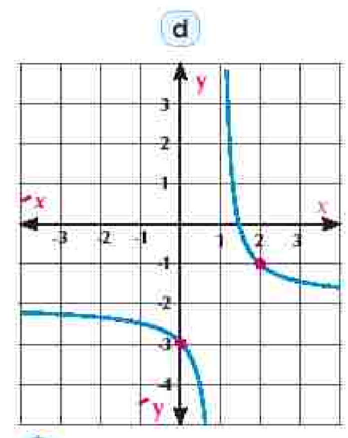
b



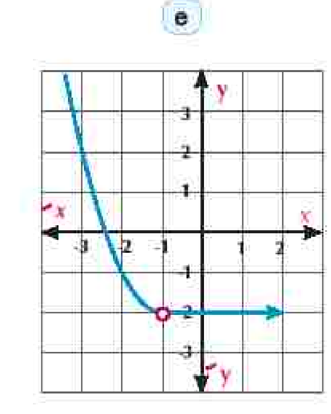
c



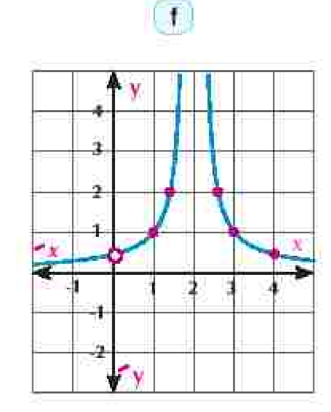
d



e



f



(3) Soit $f : [-2\ ;\ 6] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x & \text{Si} \quad x < 1 \\ x & \text{Si} \quad 1 \leqslant x \leqslant 6 \end{cases}$$

Représenter graphiquement la fonction f. Du graphique , déduire l'ensemble définition de la fonction et étudier son sens de variation

(4) Dans chacun des cas suivants, utiliser un logiciel de graphisme pour représenter la fonction f graphiquement puis déterminer si la fonction est paire ou impaire ou ni paire ni impaire ensuite vérifier la réponse algébriquement.

a $f(x) = x^2 - 5$ **b** $f(x) = 4 - x^2$ **c** $f(x) = (x - 1)^2 + 1$

d $f(x) = x^3$ **e** $f(x) = x^3 - 3x$ **f** $f(x) = \dfrac{-1}{x - 2}$

Unité 1

1 - 3 Fonctions paires et fonctions impaires



Allez apprendre

- La symétrie des courbes représentatives des fonctions.
- Les fonctions paires
- Les fonctions impaires



Vocabulaires de base

- Symétrie
- Fonction paire
- Fonction impaire

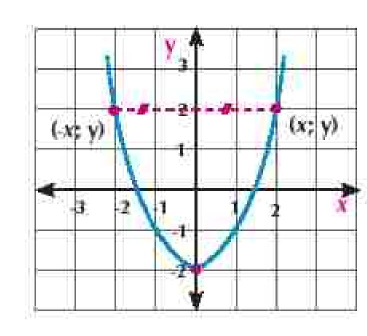
Aides pédagogiques

- Calculatrice scientifique
- Logiciels de graphisme

On peut identifier facilement des propriétés géométriques de la courbe représentative d'une fonction f où $y = f(x)$. Ces propriétés peuvent être utilisées pour l'étude des fonctions et leurs applications. Parmi ces propriétés la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées et la symétrie par rapport à l'origine.

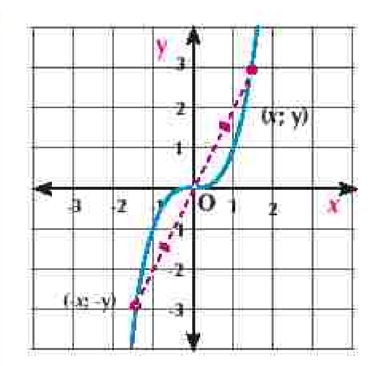
Préliminaire

Vous avez déjà étudié la notion de la symétrie par rapport à une droite où on peut plier la figure le long de la droite pour obtenir deux demi-figures superposables. Vous avez également étudié la symétrie par rapport à un point.





symétrie par rapport à l'axe des y Figure (1)



symétrie par rapport à l'origine. Figure (2)

Dans la figure (1):

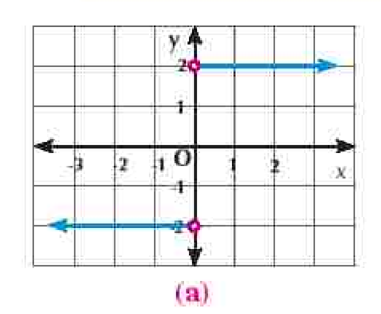
le point $(-x\,;\ y)$ situé sur la courbe de la fonction est l'image du point $(x\,;\ y)$ situé sur la même courbe par la symétrie par rapport à l'axe des y.

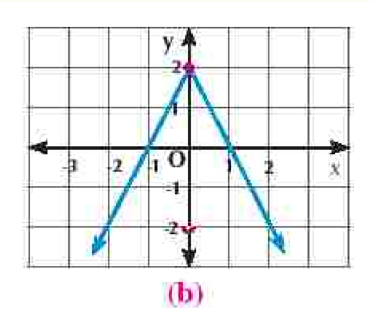
Dans la figure (2):

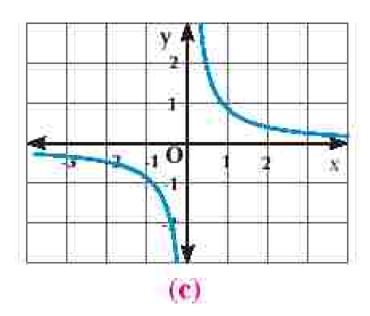
La représentation graphique de la relation entre x et y montre une symétrie par rapport au point d'origine où le point $(-x; -y)$ de la courbe est l'image du point $(x; y)$ situé sur la même courbe.

Essayez de résoudre

1. Dans chacune des figures suivantes, montrer si la courbe est symétrique par rapport à l'axe des y ou par rapport au point d'origine.


(a)


(b)


(c)

Pensé critique :

Est-ce que toutes les courbes représentatives des fonctions sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées ou par rapport à l'origine ? **Pourquoi?**

Fonctions paires et fonctions impaires



A apprendre

Fonction paire : On dit que la fonction $f: X \longrightarrow Y$ est paire si pour tout $-x$ et x appartenant à l'ensemble de définition de la fonction $f(-x) = f(x)$. La courbe d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des y.

Fonction impaire : On dit que la fonction $f: X \longrightarrow Y$ est paire si pour tout $-x$ et x appartenant à l'ensemble de définition de la fonction $f(-x) = -f(x)$. La courbe d'une fonction impaire est symétrique par rapport au point d'origine.

Remarquez que : Beaucoup de fonction ne sont pas ni paires ni impaire. Pour étudier la parité d'une fonction, il faut chercher l'existence de x et $-x$ dans l'ensemble définition de la fonction, sinon la fonction n'est pas ni paire ni impaire. Dans ce cas, ce n'est pas utile de chercher $f(-x)$



Exemple

1 Etudier la parité de chacune des fonctions suivantes .

a $f(x) = x^2$ **b** $f(x) = x^3$ **c** $f(x) = \sqrt{x+3}$ **d** $f(x) = \cos x$

Solution

a $f(x) = x^2$, Ensemble définition de $f = \mathbb{R}$

$\therefore$ pour tout $-x$ et x appartenant à $\in \mathbb{R}$, on a : $f(-x) = (-x)^2 = x^2$

C.à.d: $f(-x) = f(x)$ $\therefore$ La fonction f est paire

b $f(x) = x^3$, Ensemble définition de $f = \mathbb{R}$

$\therefore$ pour tout $-x$ et x appartenant à $\in \mathbb{R}$, on a $f(-x) = (-x)^3 = -x^3$

C.à.d: $f(-x) = -f(x)$ $\therefore$ La fonction f est impaire

Remarque importante :

La fonction $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ où $f(x) = ax^n$ où $a \neq 0$ et $n \in \mathbb{Z}^+$ est appelée fonction exponentielle, Cette fonction est paire si n est un nombre paire et elle est impaire si n est un nombre impaire

c $f(x) = \sqrt{x+3}$, Ensemble définition de $f = [-3 ; +\infty[$

Remarquer que $4 \in [-3 ; +\infty[$ et $-4 \notin [-3 ; +\infty[$

$\therefore$ Pour tout $x \in [-3 ; +\infty[$ et $-x \in [-3 ; +\infty[$

$\therefore$ La fonction f est ni paire ni impaire.

d $f(x) = \cos x$, Ensemble définition de $f = \mathbb{R}$

$\therefore$ Pour tout $-x$ et $x \in \mathbb{R}$ on a : $f(-x) = \cos(-x) = \cos x$

C.à.d. $f(-x) = f(x)$ $\therefore$ La fonction f est paire

Remarque

$\sin(-x) = -\sin x$
$\cos(-x) = \cos x$
$\tan(-x) = -\tan x$

Essayez de résoudre

2 Etudier la parité de chacune des fonctions suivantes.

- **a** $f(x) = \sin x$
- **b** $f(x) = x^2 + \cos x$
- **c** $f(x) = x^3 - \sin x$
- **d** $f(x) = x^2 \cos x$
- **e** $f(x) = x^3 \sin x$
- **f** $f(x) = x^3 \cos x$
- **g** $f(x) = x^3 + x^2$
- **h** $f(x) = \sin x + \cos x$
- **i** $f(x) = \sin x \cos x$

Que déduisez-vous ?

Propriétés importantes :

Si f_1 et f_2 sont des fonctions paires et g_1 et g_2 sont des fonctions impaires, alors :

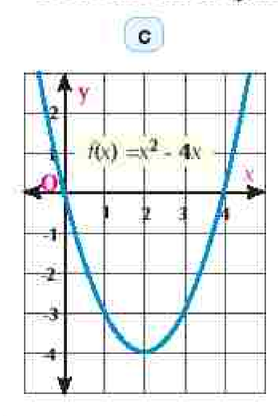
1) $f_1 + f_2$ est une fonction paire.
2) $g_1 + g_2$ est une fonction impaire.
3) $f_1 \times f_2$ est une fonction paire.
4) $g_1 \times g_2$ est une fonction paire.
5) $f_1 \times g_2$ est une fonction impaire.
6) $f_1 + g_2$ est une fonction qui est ni paires ni impaire.

En utilisant les propriétés précédentes, vérifiez votre réponse obtenues en Essayez de résoudre (2)

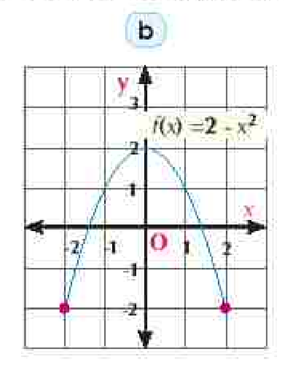
Exemple

2 Chacune des figures suivantes est une représentation de la fonction f; Déterminer graphiquement si la fonction est paire ou impaire ou ni paire ni impaire puis vérifier la réponse algébriquement.

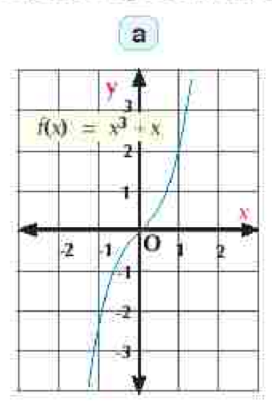
c



b



a



Solution

a $f(x) = x^3 + x$; de la représentation graphique, on remarque que :

L'ensemble définition $f = \mathbb{R}$ et la courbe de la fonction est symétrique par rapport au point d'origine. Donc la fonction est impaire. Pour vérifier le résultat algébriquement

$\because$ Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $-x \in \mathbb{R}$ $\quad \therefore f(-x) = (-x)^3 + (-x)$

En simplifiant : $\quad f(-x) = -x^3 - x$

Prendre (-1) facteur commun $\quad f(-x) = -(x^3 + x)$

$f(-x) = -f(x)$

Donc la fonction est impaire.

(b) $f(x) = 2 - x^2$, de la représentation graphique, on remarque que

L'ensemble définition de $f = [-2; 2]$, et la courbe de la fonction est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Donc la fonction est paire. Pour vérifier le résultat algébriquement

$\because$ Pour tout $x \in [-2; 2]$, $-x \in [-2; 2]$ $\quad \therefore f(-x) = 2 - (-x)^2$

En simplifiant $\quad f(-x) = 2 - x^2$

$f(-x) = f(x)$

Donc la fonction est paire

(c) $f(x) = x^2 - 4x$, de la représentation graphique, on remarque que :

L'ensemble définition de $f = \mathbb{R}$, et la courbe de la fonction n'est pas symétrique par rapport à l'axe des ordonnées ni symétrique par rapport au point d'origine. Donc la fonction est ni paire ni impaire. Pour vérifier le résultat algébriquement

$x \in \mathbb{R}$:

$\because$ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ $\quad \therefore f(-x) = (-x)^2 - 4(-x)$

En simplifiant $\quad f(-x) = x^2 + 4x \neq f(x) \quad \therefore f$ n'est pas pair

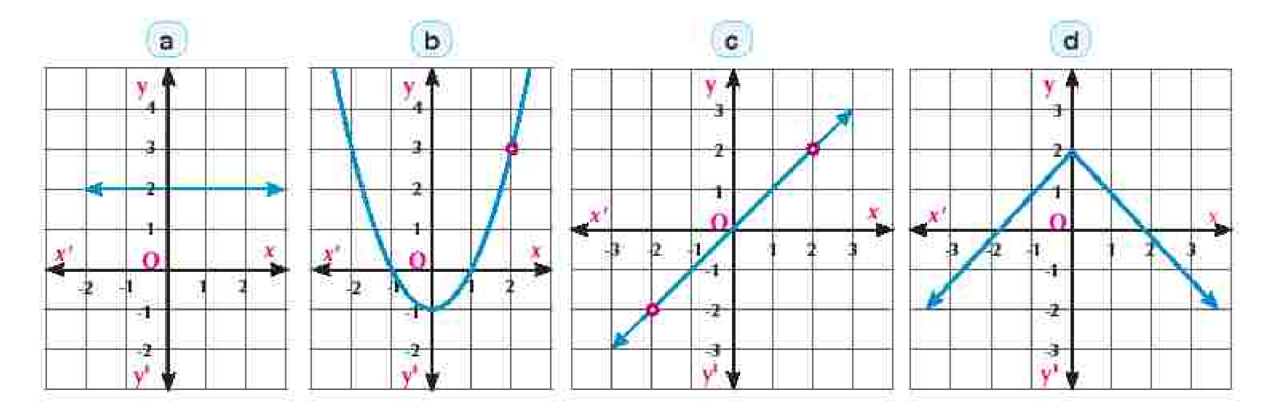
Mais $\quad -f(x) = -x^2 + 4x$

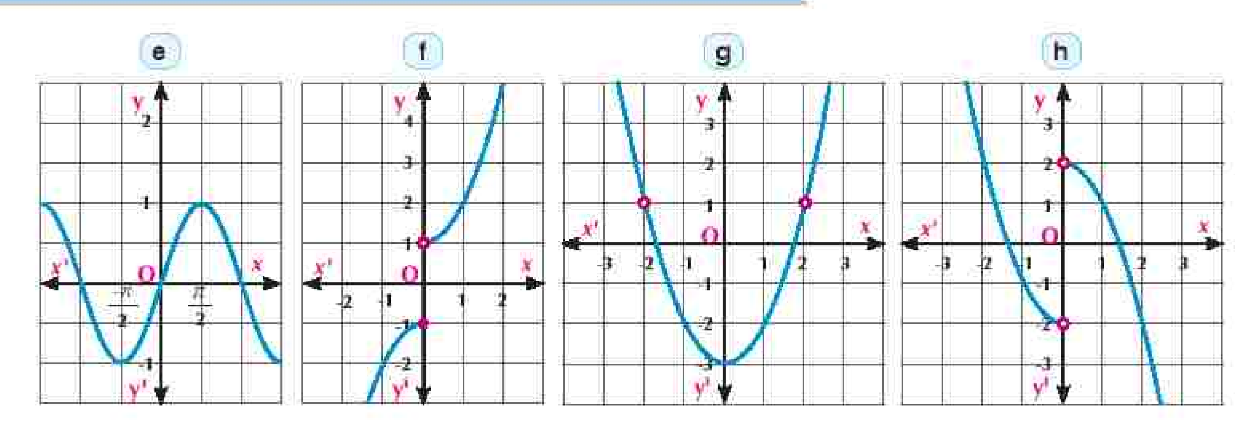
Donc $\quad f(-x) \neq -f(x) \quad \therefore f$ n'est pas impaire

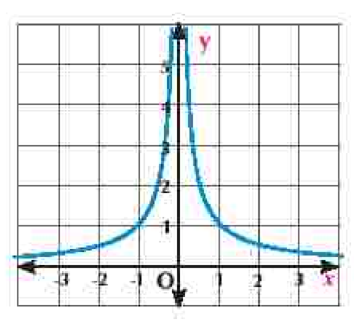
Donc la fonction n'est ni paire ni impaire.

Essayez de résoudre

(3) Dans chacune des figure suivantes, déterminer si la fonction est paire ou impaire ou n'est pas paire ni impaire.







Exemple

3. La figure suivante représente la courbe d'une fonction f telle que:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} & \text{si} \quad x < 0 \\ \frac{1}{x} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

Montrer que la fonction f est paire puis vérifiez le résultat algébriquement.

Solution

De la représentation graphique ci-contre, il est clair que la courbe de la fonction est symétrique par rapport à l'axe des y. Donc la fonction est paire.

Essayez de résoudre

4. Représentez graphiquement la fonction $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si} \quad x \geqslant -2 \\ -x-2 & \text{si} \quad x < -2 \end{cases}$.

Du graphique: montrez la parité de la fonction f puis vérifier le résultat algébriquement



1. Indiquez si la courbe est symétrique par rapport à l'axe des abscisses , par rapport à l'axe des ordonnées ou par rapport au point d'origine. Expliquez la réponse.

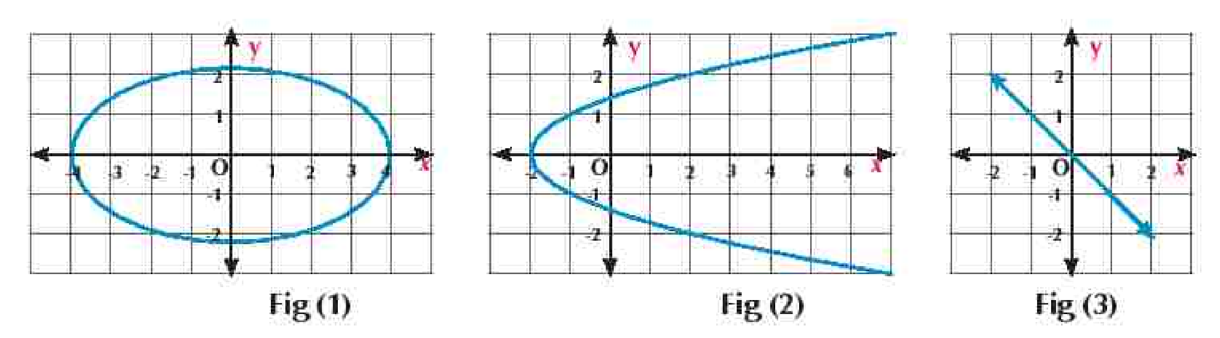


Fig (1) Fig (2) Fig (3)

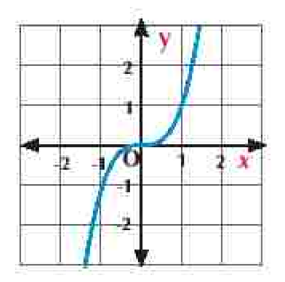


Fig (4)

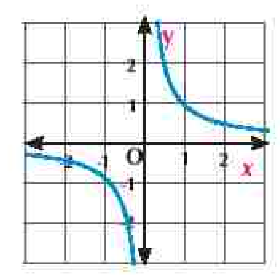


Fig (5)

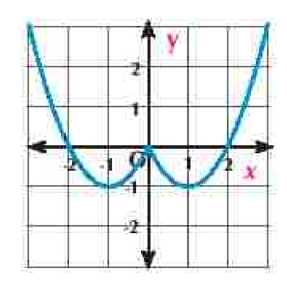


Fig (6)

2 Trouvez l'ensemble image de chacune des fonctions suivantes en déterminant sa parité.

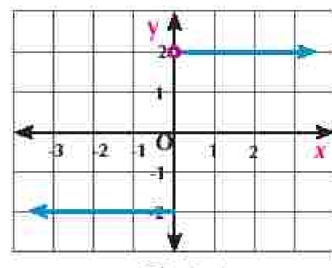


Fig (a)

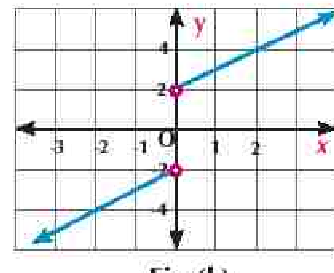


Fig (b)

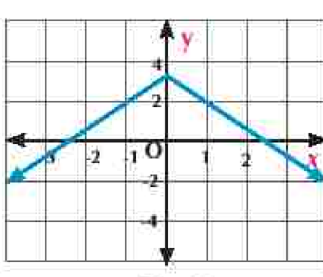


Fig (c)

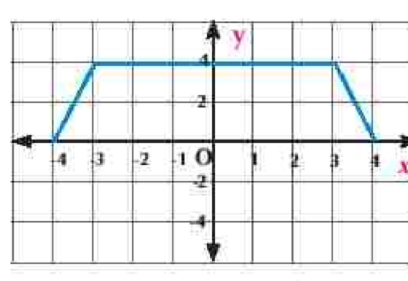


Fig (d)

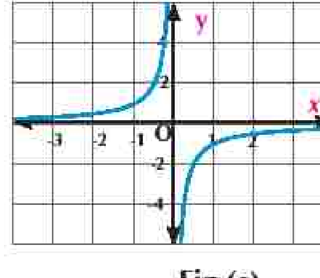


Fig (e)

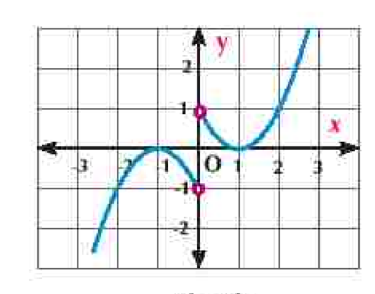


Fig (f)

3 Etudiez la parité des fonctions suivantes.

a $f(x) = x^4 + x^2 - 1$ **b** $f(x) = 3x - 4x^3$ **c** $f(x) = 5$

d $f(x) = x^2 - 3x$ **e** $f(x) = \dfrac{x^3 + 2}{x - 3}$ **f** $f(x) = x \cos x$

4 Soient f_1; f_2 et f_3 des fonctions réelles définies par $f_1(x) = x^5$; $f_2(x) = \sin x$ et $f_3(x) = 5x^2$
Parmi les fonctions suivantes, indiquez celle qui sont paires, celle qui sont impaires et celle qui ne sont ni paires ni impaires.

a $f_1 + f_2$ **b** $f_1 + f_3$ **c** $f_1 \times f_2$ **d** $f_3 \times f_2$

5 Tracez les courbes représentatives des fonctions suivantes. Du graphique, déduisez la parité de chaque fonction puis vérifier le résultat algébriquement.

a $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad x > 0 \\ -2 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$

b $f(x) = \begin{cases} -x & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$

c $f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ 7x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$

d $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ 1-x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$

6 Observez les figures puis répondre aux questions suivantes :

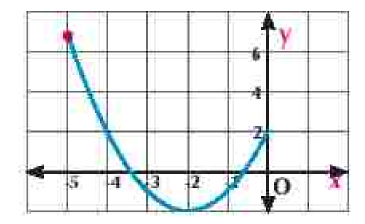


Fig (1)

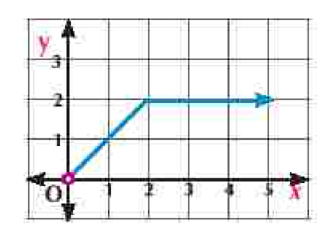


Fig (2)

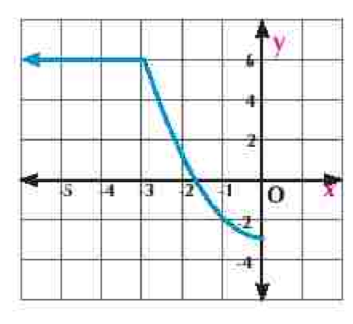


Fig (3)

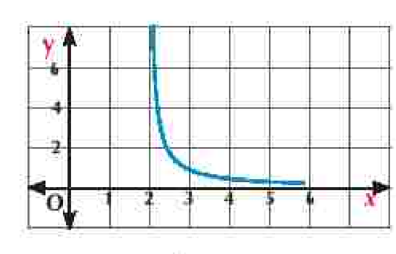


Fig (4)

I) Complétez la représentation graphique des figures (1) et (3) pour obtenir une fonction paire dans son ensemble de définition.

II) Complétez la représentation graphique des figures (2) et (4) pour obtenir une fonction impaire dans son ensemble de définition.

III) Trouvez ensuite l'ensemble de définition; l'ensemble image et le sens de variation dans chaque cas.

Rprésentation graphique des fonctions

1 - 4

Fonction polynôme

Vous avez déjà étudié les fonctions polynômes dont l'expression algébrique est sous la forme: $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ... + $ an x n

où : a_0 ; a_1 ; a_2 ; a_3 ; ...... ; $a_n \in \mathbb{R}$; $a_n \neq 0$; $n \in \mathbb{N}$

L'ensemble de définition et l'ensemble d'arrivée sont l'ensemble des nombres réels R (sauf indication contraire) , Ces fonctions sont appelées fonctions de degré n. Le degré d'une fonction polynôme non nulle est la plus grande puissance prise par la variable indépendante x. Dans ce qui suit, nous allons étudier quelques fonctions polynômes.

Remarquez:

1- Si $f(x) = a_0$; $a_0 \neq 0$ alors f est appelée une fonction polynôme constante.

2- Les fonctions polynôme de premier degré sont appelées des fonctions affines, les fonctions de second degré sont appelées fonction carrées et celles du troisième degré sont appelées fonctions cubes.

3- Si on additionne ou soustrait des fonctions de puissances différentes, on obtient une fonction polynôme.

4- Les zéros d'une fonction polynôme sont les abscisses des points d'intersection de la courbe représentative de la fonction area l'axe des abscisses.

Tracé les courbes représentatives des fonctions.

(I): Fonctions polynôme:

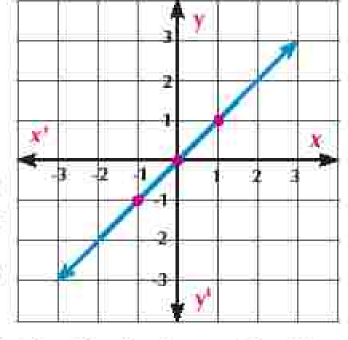


A apprendre

Le graphique ci–conte représente la courbe de la fonction $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :

1) f une fonction affine dont la forme la plus simple est : $f(x) = x$ dans ce cas on dit que f est une fonction linéare

La fonction f associe chaque nombre à lui-même, elle est représentée par une droite passant par le point de coordonnées (0; 0), et de pente = 1



(Vérifiez que: l'ensemble définition de $f = \mathbb{R}$, f est une fonction impaire , f est croissante sur $\mathbb{R}$)



Allez apprendre

- Fonctions polynômes (affine, carrée, cubique)
- Fonction valeur absolue (module)
- Fonction rationnelle
- Utiliser les transformations géométriques pour tracer les courbes représentatives des fonctions
  $y = f(x) + a$
  $y = f(x + a)$
  $y = f(x + a) + b$
  $y = -f(x)$
  $y = a f(x)$
  $y = a f(x + b) + c$
- Les transformation de quelques fonctions trigonométriques.



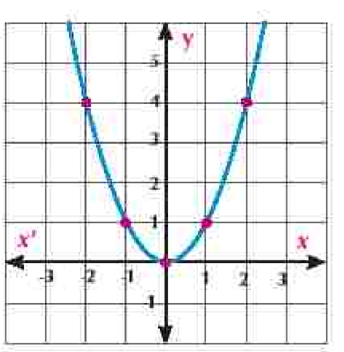
Vocabulaires de base

- Transformation
- Translation
- Symétrie
- Verticale
- Horizontale
- Asymptote



Aides pédagogiques

- Calculatrice scientifique
- Logiciels de graphisme



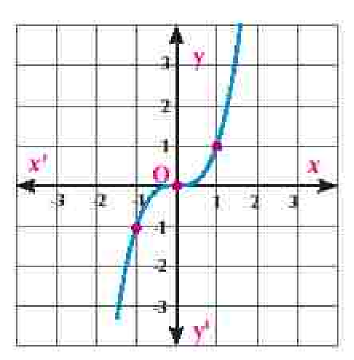
2) f une fonction du seconde degré dont la forme la plus simple est:

$$f(x) = x^2$$

dans ce cas on dit que f est une fonction carrée

La fonction f associe un nombre à son carré, elle est représentée graphiquement par une parabole symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et de sommet le point de coordonnées (0; 0)

(**Vérifiez que:** l'ensemble définition de $f = \mathbb{R}$, f est une fonction paire, f est décroissante sur $]-\infty; 0[$ et f est croissante sur $]0; +\infty[$)



3) f une fonction cubique dont la forme la plus simple est:

$$f(x) = x^3$$

dans ce cas on dit que f est une fonction carrée

La fonction f associe le nombre par son cube, elle représentée graphiquement par une courbe dont le point de coordonnées (0; 0) est un centre de symétrie

(**Vérifiez que:** l'ensemble définition de $f = \mathbb{R}$, f est une fonction impaire, f est croissante sur $\mathbb{R}$)

Exemple

4 Tracez la courbe représentative de la fonction f telle que:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x < 2 \\ 4 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

Solution

1) Si $x < 2$, $f(x) = x^2$

on trace $f(x) = x^2$ pour tout $x\ ]-\infty\ ;\ 2[$

en posant un rond vide au point de coordonnées **(2 ; 4)** **figure (1)**

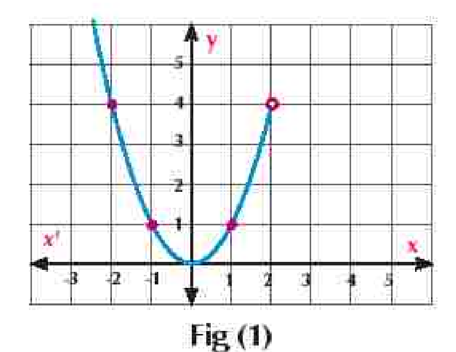
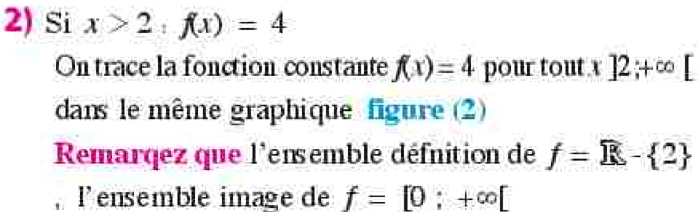


Fig (1)



2) Si $x > 2$: $f(x) = 4$

On trace la fonction constante $f(x) = 4$ pour tout $x\ ]2;+\infty[$

dans le même graphique **figure (2)**

Remarquez que l'ensemble défnition de $f = \mathbb{R} - \{2\}$

, l'ensemble image de $f = [0\ ;\ +\infty[$

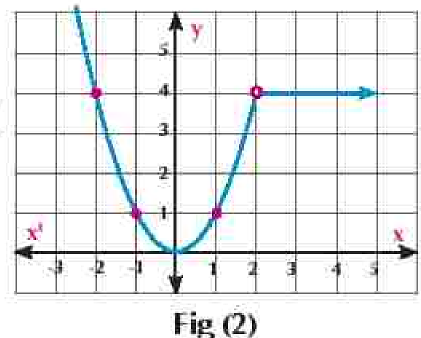


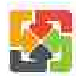
Fig (2)

Essayez de résoudre

① Tracez la courbe représentative de la fonction f :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

en déduisez l'ensemble image et étudiez le sens de variation de la fonction.



A apprendre Fonction valeur absolue (module)

La forme la plus simple de la fonction valeur absolue (module) est

$$f(x) = |x| \; ; \; x \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x > 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Remarquez que: $|-3| = |3| = 3$, $|0| = 0$; $\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{2^2} = 2$

C'est à dire que: $|x| > 0$; $|-x| = |x|$; $\sqrt{x^2} = |x|$

La fonction f est représentée par deux demi – droites

d'origine le point de coordonnée dont la pente de l'une = 1et celle de l'autre = −1



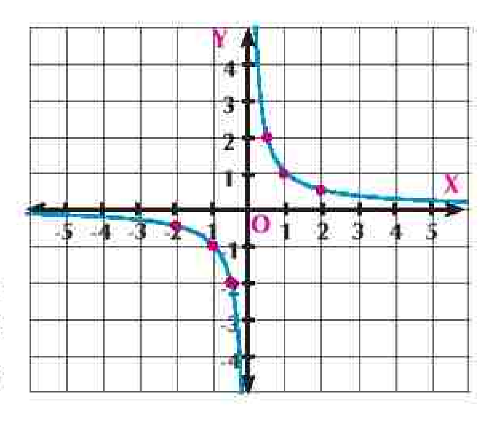
(**Vérifiez que:** l'ensemble image de $f = [0 \; ; +\infty[$, f est une fonction paire , f est décroissante sur $]-\infty \; ; 0[$ et f est croissante sur $]0;+\infty[$)



A apprendre Fonction rationnelle

La forme la plus simple de la fonction rationnel est:

$$f(x) = \frac{1}{x} \; ; x \in \mathbb{R} - \{0\}$$



La fonction f qui est appelée la fonction inverse, elle relie chaque nombre par son inverse, elle est représentée graphiquement par une hyperbole une courbe dont le point de coordonnées (0 ; 0) est un centre de symétrie

($x = 0$ et $y = 0$ sont les asymptotes de la courbé)

(**Vérifiez que:** l'ensemble définition de $f = \mathbb{R} - \{0\}$, f est une fonction impaire, f **est décroissante sur** $]-\infty; 0[$ **et** f **est décroissante sur** $]0; +\infty[$)

Essayez de résoudre

② Tracez la courbe représentative de la fonction $f(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } x \leqslant 0 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

en déduisez l'ensemble image et étudiez le sens de variation de la fonction.

La transformation géométrique de la courbe d'une fonction



Travail coopératif

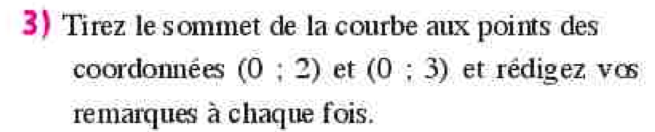
(I) La transformation verticale de la courbe de la fonction

Travaillez avec votre camarade

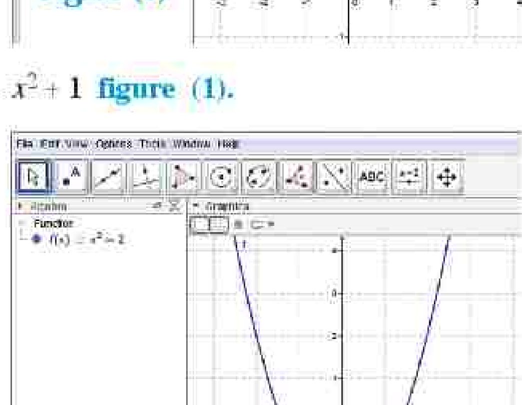
1) Tracez la courbe représentative de la fonction f: $f(x) = x^2$ en utilisant le logiciel Geogebra

2) Posez la le curseur sur le sommet de la courbe et tirez-la une unité verticalement vers le haut. Observez la nouvelle règle de la fonction $f(x) = x^2 + 1$ **figure (1).**

Figure (1)



3) Tirez le sommet de la courbe aux points des coordonnées (0 ; 2) et (0 ; 3) et rédigez vos remarques à chaque fois.



4) Tirez la courbe de la fonction $f(x) = x^2$ deux unités verticalement vers le bas et observez le changement de la règle de la fonction, vous trouvez une nouvelle règle:
$f(x) = x^2 - 2$ Figure (2)

Figure (2)

Réfléchissez : Comment peut-on obtenir la courbe de la fonction $g(x) = x^2 - 5$ à partir de la courbe de la fonction $f(x) = x^2$?

De ce que précéde, on remarque que :

Si $f(x) = x^2$; $g(x) = x^2 + 1$ et $h(x) = x^2 - 2$; alors :

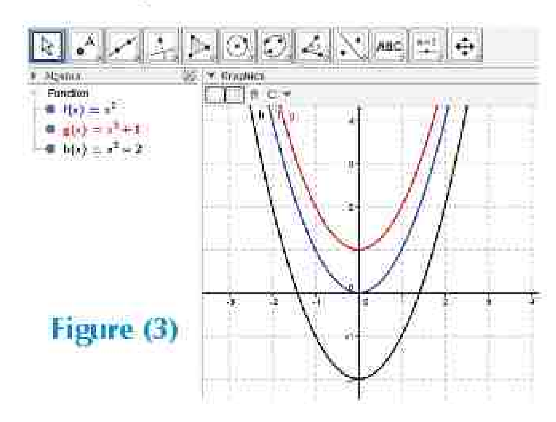


Figure (3)

1) La courbe de $g(x)$ est la même que(superposable à) la courbe de $f(x)$ par une translation d'amplitude a unité dans la direction positive de l'axe des ordonnées.

2) La courbe de $g(x)$ est la même que (superposable à) la courbe de $f(x)$ par une translation d'amplitude deux unité dans la direction négative de l'axe des ordonnées.

Pensé critique : En utilisant la courbe de $f(x) = x^3$, montrez comment peut-on tracez la courbe De chacune des fonctions définies ci-desous:

a $g(x) = x^3 + 4$ **b** $h(x) = x^3 - 5$

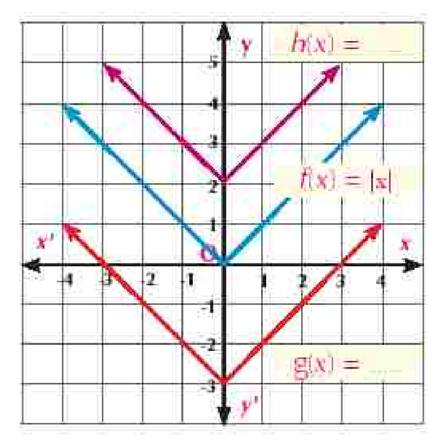


A apprendre **Tracé de la courbe de $y = f(x) + a$**

Pour une fonction f ; la courbe d' équation $y = f(x) + a$ est la même que la courbe de $y = f(x)$ par une translation d'amplitude a unité dans la direction $\overrightarrow{oy}$, si $a > 0$; ou $\overrightarrow{oy'}$ si $a < 0$

Exemple

5) La figure ci – contre indique les courbes des fonction f, g et h Ecrire la règle de g et celle de h sachant que $f(x) = |x|$



Solution

∵ La courbe de $g(x)$ est la même que celle de $f(x)$ mais déplacée 3 unités dans la direction négative de l'axe des ordonnées. $\overrightarrow{oy'}$

$r(x) = f(x) - 3$ ∵ $f(x) = |x|$ ∴ $g(x) = |x| - 3$

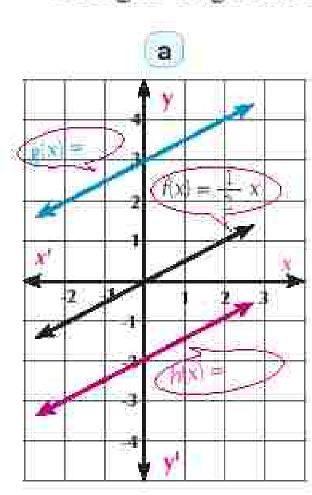
∵ La courbe de $h(x)$ est la même que celle de $f(x)$ mais déplacée 2 unités dans la direction positive de l'axe des ordonnées. $\overrightarrow{oy}$

∴ $h(x) = f(x) + 2$ ∵ $f(x) = |x|$ ∴ $h(x) = |x| + 2$

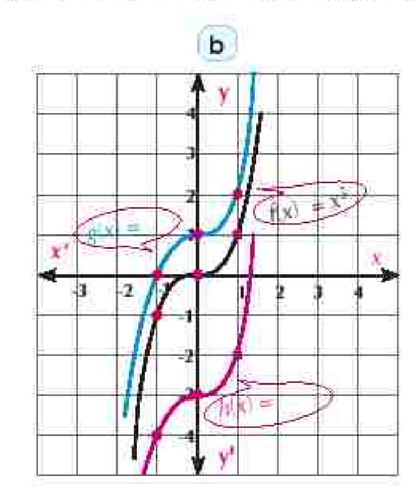
Essayez de résoudre

3) Les figures suivantes indiquent les courbes représentatives des fonctions : f, g et h. Ecrivez les règles de g et h en fonction de $f(x)$ dans chaque figure.

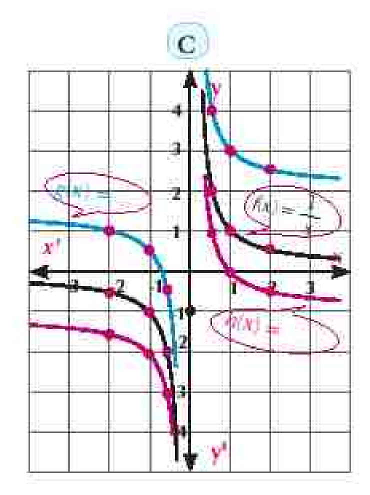
a



b



C



Translation horizontal de la courbe d'une fonction

Travail coopératif

Travaillez avec votre collègue:

1) Tracez la courbe représentative de la fonction f: $f(x) = |x|$ en utilisant le logiciel Geogebra Écrivez la règle de la fonction dans la fenêtre Insérer comme suivant : abs(x) puis cliquer sur Insérer, la courbe de la fonction apparaît dans la fenêtre graphique et la règle de la fonction $f(x) = |x|$ dans la fenêtre algébrique **Figure (1)**

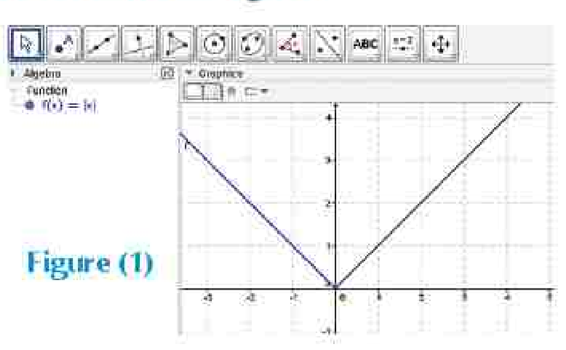
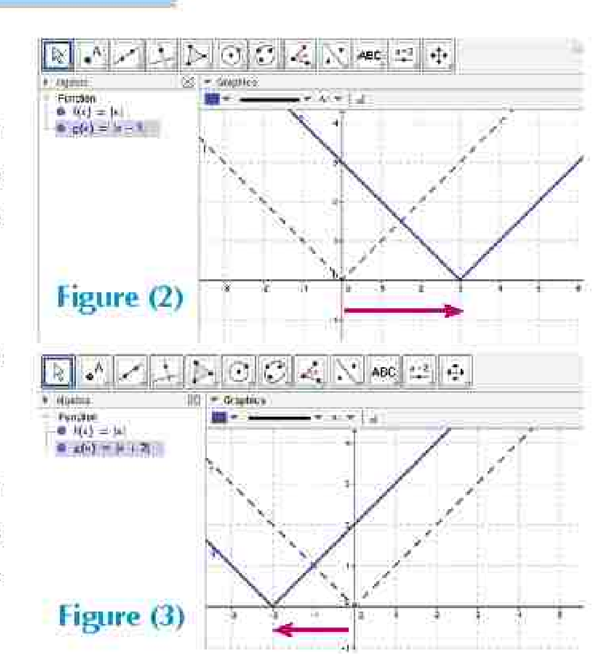


Figure (1)


Figure (2)
Figure (3)

2) Tirez la courbe quelques unités horizontalement dans la direction positive de l'axe des abscisses. Observez la nouvelle règle dans la fenêtre algébrique **Figure (2)**

3) Tirez la courbe dans la direction négative de l'axe des abscisses. Que remarquez-vous **Figure (3)**

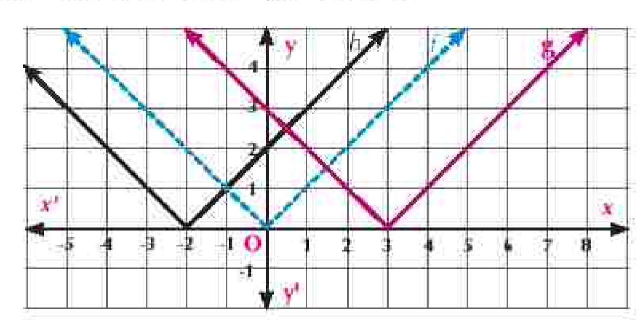
Réfléchissez: Comment peut-on obtenir les courbes des fonctions g et h à partir de la courbe de la fonction f : $f(x) = |x|$? Sachant que $g(x) = |x - 5|$, $h(x) = |x + 4|$.



A apprendre

Tracé de la courbe de $y = f(x + a)$

Pour une fonction f la courbe d' équation $y = f(x + a)$ est la même que la courbe de $y = f(x)$ par translation d'amplitude a unité dans la direction $\overrightarrow{ox}$ si $a < 0$ ou $\overrightarrow{ox'}$ si $a > 0$



Remarquez que : Dans la figure ci-contre : $f(x) = |x|$:

1) La courbe de la fonction g est la même que celle de f mais déplacée 3 unités dans la direction de l'axe $\overrightarrow{ox}$

$\therefore$ $g(x) = |x - 3|$ l'origine de deux demi-drotes est le points de coordonnées (3; 0)

2) La courbe de h est la même que celle de f mais déplacée 2 unités dans la direction de l'axe $\overrightarrow{ox}$

$\therefore$ $g(x) = |x + 2|$, et l'origine de deux demi-drotes est le points de coordonnées (-2 ; 0)

Exemple

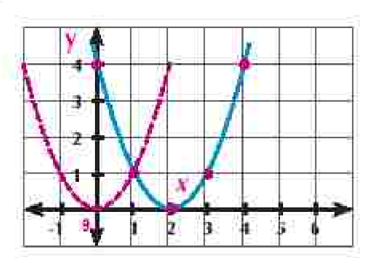
6 Utilisez la courbe de la fonction f telle que : $f(x) = x^2$ pour tracer les deux courbes représentatives des fonctions g et h sachant que :

a $g(x) = (x - 2)^2$

b $h(x) = (x + 3)^2$

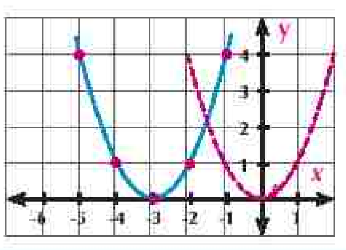
Solution

a



- La courbe de $g(x) = (x - 2)^2$ est la même que celle de $f(x) = x^2$ mais déplacée deux unités dans la direction positive de l'axe des abscisses. Les coordonnées du sommet de la courbe sont (0; 2).

b



- La courbe de $h(x) = (x + 3)^2$ est la même que celle de $f(x) = x^2$ mais déplacée 3 unités dans la direction négative de l'axe des abscisses. Les coordonnées du sommet de la courbe sont (-3 ; 0).

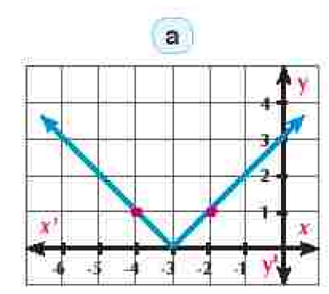
Essayez de résoudre

4) Utilisez la courbe de la fonction f telle que : $f(x) = x^2$ pour tracer les deux courbes représentatives des fonctions g et h sachant que :

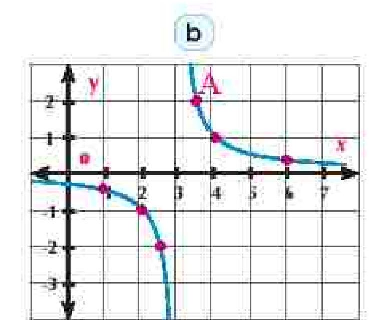
a) $g(x) = (x + 4)^2$ b) $h(x) = (x - 3)^2$

5) Les figures suivantes indiquent les courbes représentatives des fonctions f g et h. Ecrivez les règles de g et h en fonction de $f(x)$ dans chaque figure:

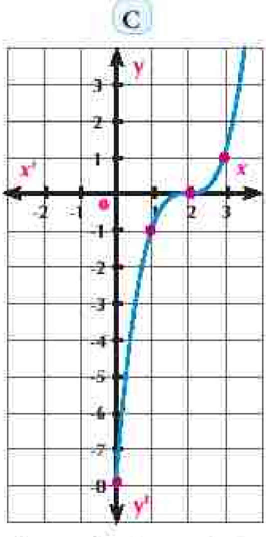
a



b



C



Pensé critique : Comment peut-on obtenir la courbe de la fonction $f(x) = x^2$, à partir de la courbe de la fonction $g(x) = (x - 3)^2 + 2$

Tracé de la courbe de $y = f(x + a) + b$

De ce qui précéde , on déduit que : la courbe d' équation $y = f(x + a) + b$ est la même que la courbe de $y = f(x)$ par translation horizontale d'amplitude a unités (dans la direction $\overrightarrow{ox}$ si $a < 0$, ou $\overrightarrow{ox'}$ si $a > 0$), suivi par translation verticale d'amplitude b unités (dans la direction $\overrightarrow{oy}$ si $b > 0$ ou $\overrightarrow{oy'}$ si $b < 0$)

Essayez de résoudre

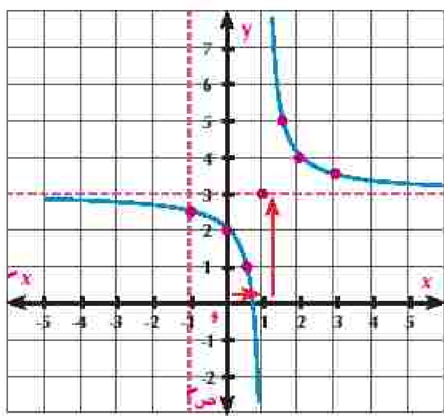
(6) Utilisez la courbe de la fonction f telle que $f(x) = x^2$ pour tracer les deux courbes représentatives des fonctions g et h sachant que :

(a) $g(x) = (x + 2)^2 - 4$ (b) $h(x) = (3 - x)^2 - 1$

Exemple

Application des transformations géométriques pour traces les courbes

(7) Tracez la courbe représentative de la fonction g telle que $g(x) = \frac{1}{x - 1} + 3$ Du graphique : déduisez l'ensemble définition et le sens de variation de la fonction





Solution

La courbe de g est la même que celle de $f(x) = \frac{1}{x}$ par une translation d'amplitude une unité dans la direction $\overrightarrow{ox}$ (a = -1 < 0) suivi d'une translation d'amplitude 3 unités dans la direction Le point coordonnées (2 ; 0) est le centre de symétrie de la courbe. Ensemble image de $g = \mathbb{R} - \{3\}$

Sens de variation de g : g est décroissante sur $]-\infty; 1[$ et décroissante sur $]1; \infty[$

Pensé critique : Peut-on dire que la fonction $f(x) = \frac{1}{x - 2} + 3$ est décroissante sur son ensemble définition ? Justifiez votre réponse.

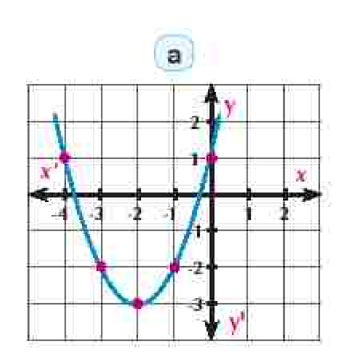
Essayez de résoudre

(7) Utilisez la courbe de la fonction f telle que $f(x) = \frac{1}{x}$ où $x \neq 0$ pour reprénter chacune des fonctions définie ci-après:

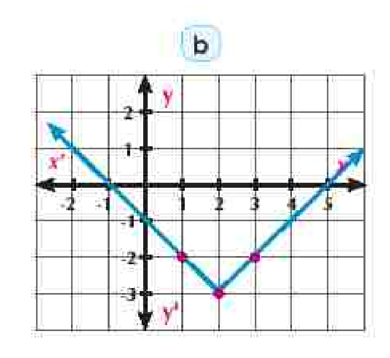
(a) $g(x) = \frac{1}{x + 2} + 1$ (b) $h(x) = \frac{2x - 3}{x - 2}$

(8) Ecrivez la règle de chacune des fonctions représentées graphiquement par les figures suivantes:

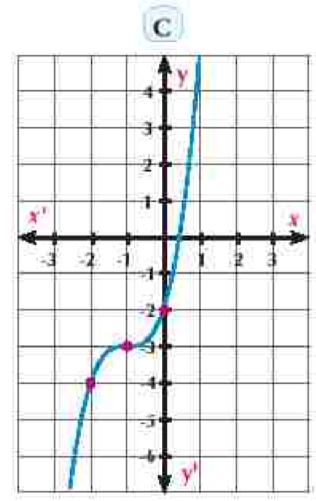
(a)



(b)

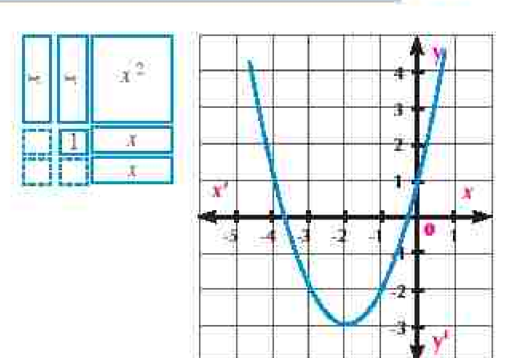


(C)



Remarque: On peut tracer la courbe de $f(x) = x^2 + 4x + 1$ en utitilisant la translation verticale et la translatioin horizontale de la courbe de $g(x) = x^2$ comme suivant.

$f(x) = x^2 + 4x + 1$ en complétant le carré
$= (x^2 + 4x + 4) - 3$
$= (x + 2)^2 - 3$

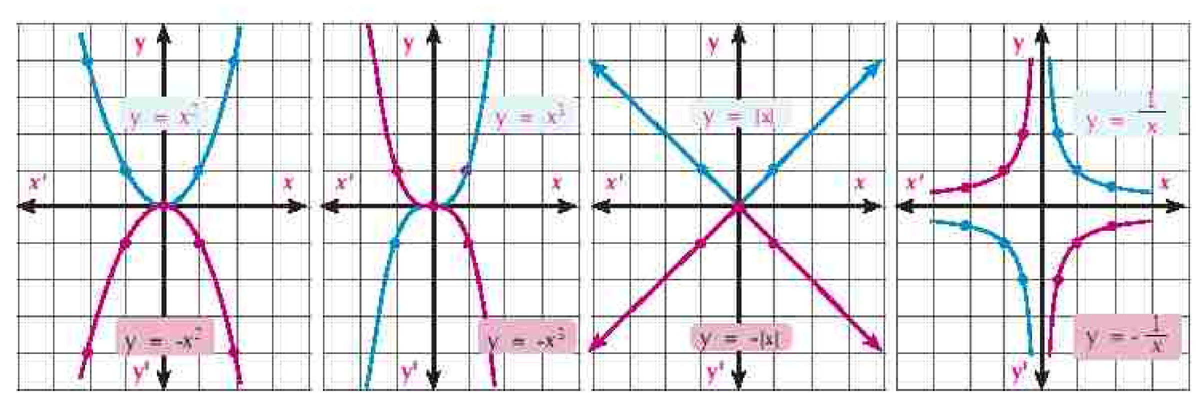


C'est-à-dire que la courbe de la fonction f est le même que la courbe de la fonction g où $g(x) = x^2$ par une translation d'imlitude 2 unités dans la direction $\overrightarrow{ox'}$, suivi par une translation d'imlitude 3 unités dans la direction $\overrightarrow{oy'}$ qui est représenté dans la fgure ci-contre.

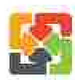
Application : En utilisant la calculatrice graphique, tracez la courbe représentative de la fonction $f(x) = x^2 + 6x + 7$ en déduisant l'ensemble définition et le sens de variation de la fonction.

(III): Symétrie de la courbe représentative d'une fonction par rapport à l'axe des abscisses

Les figures suivantes montrent la symétrie de quelques fonctions usuelles par rapport à l'axe des abscisses.



Que remarquez-vous ? Et qu'en déduisez-vous ?



A apprendre

Tracé de la fonction $y = -f(x)$ Pour une fonction f la courbe de $y = -f(x)$ est l'image de la courbe de $y = f(x)$ dans la symétrie par rapport à l'axe des abscisses.



Exemple

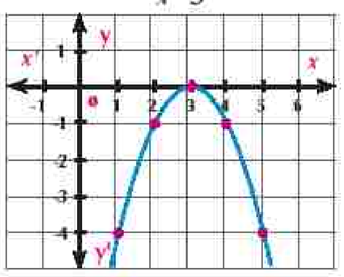
Application des transformations géométriques pour tracer les courbes représentatives des fonctions

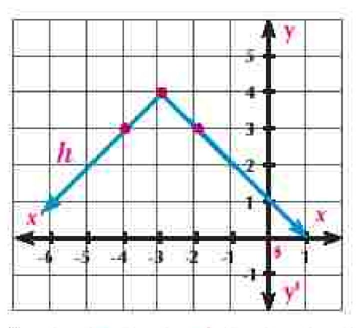
8 Utilisez les courbes des fonctions usuelles pour tracer les courbes des fonctions g, h et i telles que:

a $g(x) = -(x - 3)^2$ **b** $h(x) = 4 - |x+3|$ **c** $i(x) = 2 - \frac{1}{x - 3}$

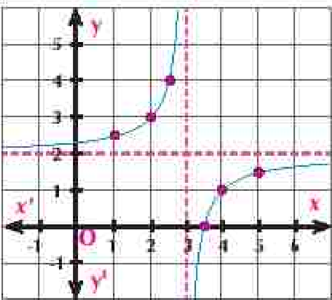
Solution

a La courbe de $g(x)$ est l'image de celle de $f(x) = x^2$ dans la symétrie par rapport à l'axe des abscisses suivi d'une translation d'amplitude 3 unités dans la direction $\overrightarrow{ox}$. Les coordonnées du centre de la symétrie de la courbe sont (3 ; 0). La courbe est ouverte vers le bas.





b La courbe de $h(x)$ est l'image de celle de $f(x) = |x|$ dans la symétrie par rapport à l'axe des abscisses suivi d'une translation d'amplitude 3 unités dans la direction $\overrightarrow{ox'}$, et d'une translation d'amplitude 4 unités dans la direction $\overrightarrow{oy}$. Les coordonnées d'origine de deux demi-droites sont (-3 ; 4) La courbe est ouverte vers le bas.



c La courbe de $i(x)$ est l'image de celle de $f(x) = \frac{1}{x}$ dans la symétrie par rapport à l'axe des abscisses suivi d'une translation d'amplitude 3 unités dans la direction $\overrightarrow{ox}$, et d'une translation d'amplitude 2 unités dans la direction $\overrightarrow{oy}$, Les coordonnées du centre de la courbe sont (3 ; 2).

 **Essayez de résoudre**

9 Dans chacun des cas suivants, tracez la courbe de la fonction g telle que:

a $g(x) = 3 - (x + 1)^2$ **b** $g(x) = -(x - 3)^3$ **c** $g(x) = 3 - |x - 5|$

Puis justifiez votre dessin en utilisant un logiciel ou une calculatrice graphique.

(IV): Dilatation de la courbe d'une fonction

Travail coopératif

Tracé de la courbe de $g(x) = a\,f(x)$

Travaillez avec votre camarade.

1) Tracez la courbe de la fonction $f(x) = x^2$ en utilisant le logiciel Geogebra dans la fenetre Inserer, écrivez la règle de la fonction comme suivant:



Une nouvelle fenêtre apparaitra **(Figure 1)** en choisissez créer des curseurs

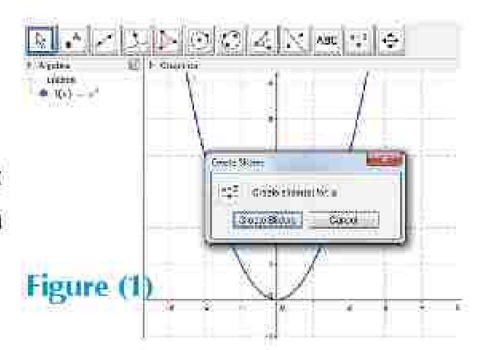


Figure (1)

2) Utilisez le curseur des valeurs pour choisir d'autres valeurs de a où a < 1 Observez le changement de la courbe par rapport à la courbe de la fonction f pour tout $x \in \mathbb{R}$ **Figure (2)** Faisez le meme pour a > 1 **Figure (3)**

Que remarquez-vous ? Qu'en déduisez-vous ?

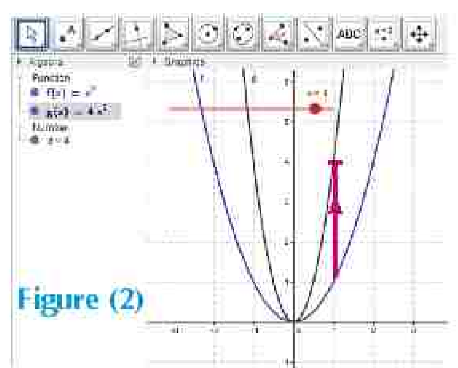


Figure (2)

A apprendre

Tracé de la courbe de y = a f (x)

Pour une fonction f ; la courbe de y = a $f(x)$ où a > 0
Est une dilatation verticale de la courbe de y = $f(x)$; de de coefficient = a . Cette dilatation est un agrandissement si a > 1 et est réduction si a < 1

Tracé la courbe de la fonction h telle que $h(x) = a\,f\,(x + b) + c$

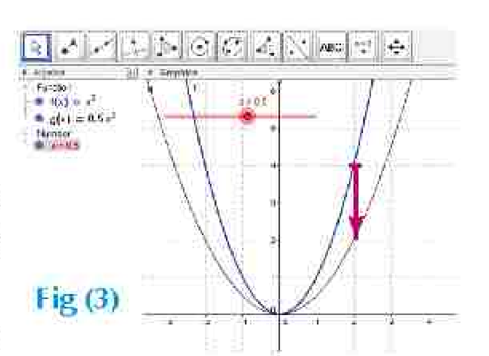


Fig (3)

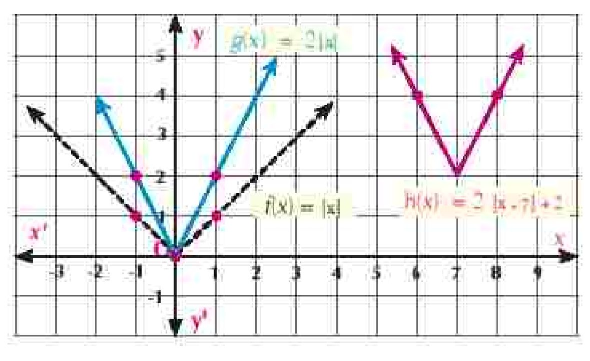
Exemple

(9) Utilisez la courbe de la foction f telle que $f(x) = |x|$ pour tracer les deux courbes des fonctions g et h telles que

a) $g(x) = 2|x|$ b) $h(x) = 2|x - 7| + 2$

Solution

a) Tracez de la courbe de $g(x)$. La courbe de g est une dilatation verticale de la courbe de la fonction f de coefficient a = 2 > 0. Alors pour tout $(x ; y) \in$ graphe de g, $(x; 2\,y) \in$ graphe de g



b) La courbe de $h\,(x)$ est l'image de celle de $f\,(x)$ par une translation d' amplitude 7 unités dans la direction $\overrightarrow{ox}$, suivi d' une translation d'amplitude 2 unités dans la direction $\overrightarrow{oy}$

Essayez de résoudre

(10) Utilisez la courbe de la foction f telle que $f(x) = x^2$ pour tracer les deux courbes des fonctions g et h telles que :

a) $g(x) = -\frac{1}{2}x^2$ b) $h(x) = 2 - \frac{1}{2}(x - 5)^2$

Justifiez votre dessin en utilisant un logiciel ou une calculatrice graphique puis déterminez l'ensemble image et le sens de variation de h.

Activité

- Application des transformations géométriques étudiées pour les fonctions de sinus de cosinus

Fonctions trigonométriques (courbe de la fonction sinus)

a) Translation de la courbe de la fonction dans la direction de l'axe des abscisses:

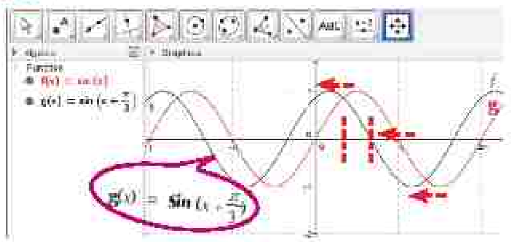
1) Utiliser le logiciel (Geogebra) et régler ses paramètres pour que la graduation de l'axe des abscisses soit en radians. Pour cela, avec un clic-droit sur l'interface, choisir (axe des abscisses) dans la dernière ligne puis choisir le mode de graduation (π).

2) Dans la zone virtuelle, située en bas de l'écran, tapez l'instruction: **sin (x)** puis appuyer sur (**enter**) La courbe de la fonction sinus s'affiche. La couleur et l'épaisseur de la courbe peuvent être réglées par un clic-gauche sur la courbe de la fonction suivie par le choix de la couleur désirée et l'épaisseur de la courbe etc.

3) De la même manière, on tape: **((3/π) + x) sin** qui veut dire: $y = \sin(x + \frac{\pi}{3})$ puis on appuie sur (**enter**) puis on accorde une autre couleur à la nouvelle courbe.

4) Comparez les deux courbes. Que remarquez-vous ?

On remarque que la courbe de la fonction sinus a été translatée horizontalement de $\frac{\pi}{3}$ (vers la gauche. La deuxième fonction et la fonction **Sin** x ont le même $[-1 ; 1]$ la fonction $\sin(x + \frac{\pi}{3})$ n'est ni paire ni impaire car elle n'est ni symétrique par rapport à l'axe des y ni par rapport au point d'origine.



Pour réfléchir: Quelle translation dans la direction de l'axe des x peut porter la courbe de la fonction: $\sin(x - \frac{\pi}{3})$ par rapport à la courbe de la fonction $\sin x$?

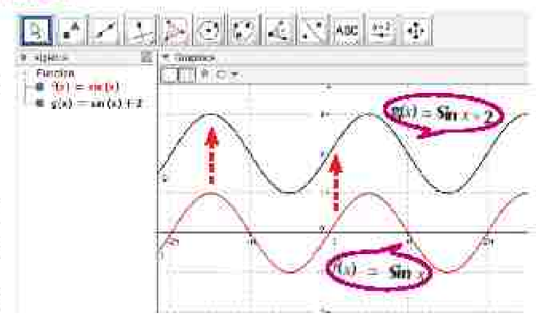
II) Translation de la courbe de la fonction dans la direction de l'axe des ordonnées

1) Tracer la courbe représentative de la fonction $y = \sin x$ comme précédemment.

2) Tracer, en une autre couleur, la courbe représentative de la fonction $y = \sin x + 2$

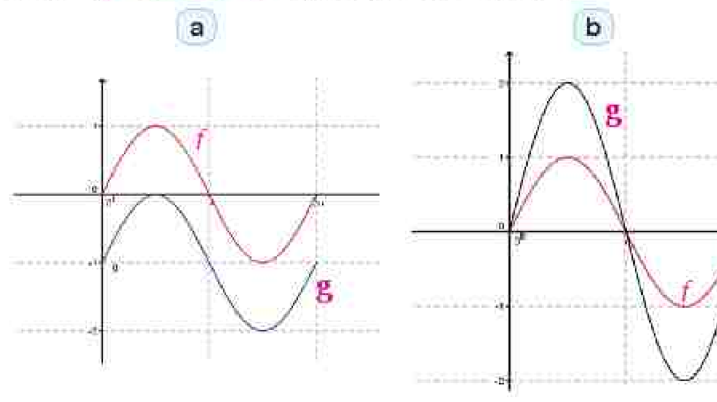
Comparer les deux courbes. Que remarquez-vous ?

Dans la représentation graphique,
on trouve que la courbe de la deuxième fonction est obtenue de la courbe de $y = \sin(x)$, par une translation de 2 unités vers le haut.
On remarque que l'ensemble image de la deuxième fonction est $[1 ; 3]$: car on a translaté la courbe de la première fonction de 2 unités dans la direction positive de l'axe des y. On remarque également que la fonction $y = \sin x + 2$ n'est ni paire ni impaire.



Pensé critique :

Dans chacune des figures ci-dessous : Décrivez les transformations géométriques de la courbe de la fonction f pour tracer la courbe de la fonction g, puis déterminez son ensemble image et étudiez le sens de variation de la fonction.





Exercices 1 - 4



1. Tracez la courbe représentative de la fonction f du graphique

a) $f(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } x \leqslant 0 \\ x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 4 & \text{si } x < -2 \\ x^2 & \text{si } x \geqslant -2 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x < 0 \\ |x| & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Choisissez la bonne réponse parmi les réponses données:

2. La courbe représentative de la fonction $g(x) = x^2 + 4$ est le même que celle de la fonction $f(x) = x^2$ par une translation d'amplitude 4 unités dans la direction :

a) $\overrightarrow{ox}$ b) $\overrightarrow{ox'}$ c) $\overrightarrow{oy}$ d) $\overrightarrow{oy'}$

3. La courbe représentative de la fonction $g(x) = |x + 3|$ est le même que celle de la fonction $f(x) = |x|$ par une translation d'amplitude 3 unités dans la direction:

a) $\overrightarrow{ox}$ b) $\overrightarrow{ox'}$ c) $\overrightarrow{oy}$ d) $\overrightarrow{oy'}$

4. Les coordonnées du sommet de la courbe de la fonction $f(x) = (2 - x)^2 + 3$ sont :

a) (2; 3) b) (2; -3) c) (-2; 3) d) (-2; -3)

5. Les coordonnées du centre de symétrie de la courbe de la fonction $f(x) = 2 - (x + 1)^3$ sont :

a) (1; 2) b) (-1; 2) c) (2; 1) d) (2; -1)

6. Les coordonnées du centre de symétrie de la courbe de la fonction $f(x) = \frac{1}{x - 3} + 4$ sont :

a) (3; -4) b) (-3; -4) c) (3; 4) d) (-3; 4)

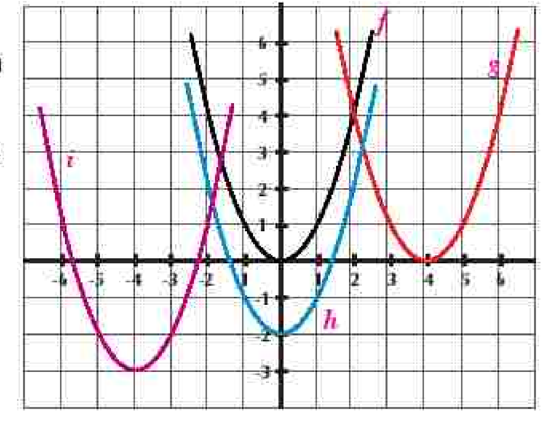
Répondez à ce qui suit:

7. Dans la figure ci-contre, on trace la courbe de la fonction $f(x) = x^2$

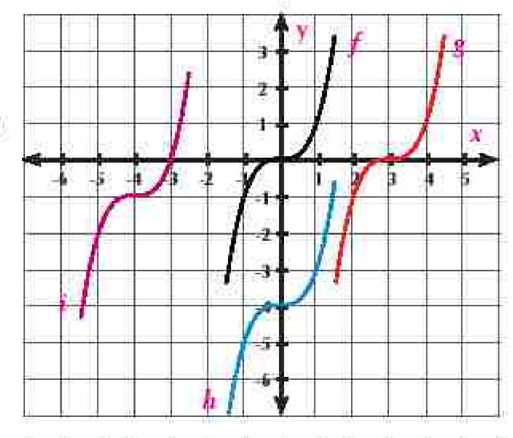
La courbe a été déplacée dans les directions des axes des coordonnées x et y

Écrivez les règle de chacune des fonctions:

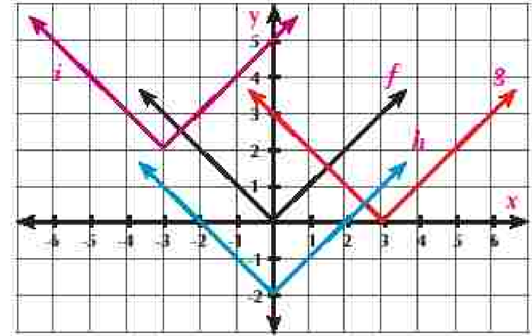
➢ g , h et i



8 Dans la figure ci-contre, on tracé la courbe de la fonction $f(x) = x^3$
La courbe a été déplacée dans les directions des axes des coordonnées x et y.
Écrivez la règle de chacune des fonctions : g , h et i

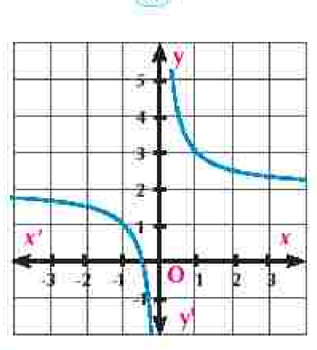


9 Dans la figure ci-contre, on tracé la courbe de la fonction $f(x) = |x|$
La courbe a été déplacée dans les directions des axes des coordonnées x et y.
Écrivez la règle de chacune des fonctions : g , h et i

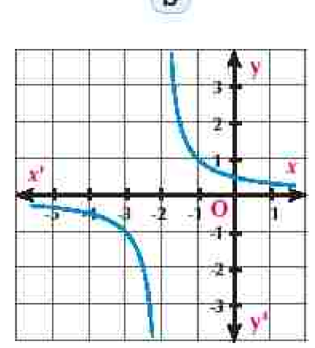


10 Dans la figure ci-contre, on tracé la courbe de la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$, la courbe a été déplacée dans les directions des axes des coordonnées x et y.
Écrivez les règles de chacune des fonctions représentées dans chacune des figures ci-dessous:

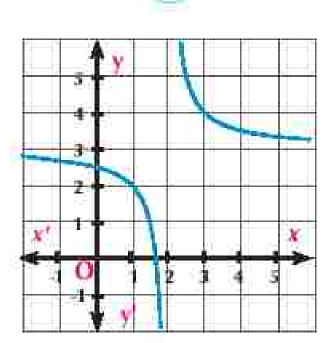
a



b



c



11 Utilisez la courbe de la fonction f telle que $f(x) = x^2$ pour tracer la courbe représentative de chacune des fonctions définies ci-dessous:

a $f_1(x) = x^2 - 4$ **b** $f_2(x) = (x-3)^2$ **c** $f_3(x) = (x-1)^2 - 2$

12 Utilisez la courbe de la fonction f telle que $f(x) = |x|$ pour tracer la courbe représentative de chacune des fonctions définies ci-dessous:

a $f_1(x) = |x| + 1$ **b** $f_2(x) = |x+2|$ **c** $f_3(x) = |x-3| - 2$

➢ **Puis déterminez les coordonnées des points d'intersection de la courbe avec les axes des coordonnées dans chaque cas.**

13 Utilisez la courbe de la fonction f telle que $f(x) = x^3$.
pour tracer la courbe représentative de chacune des fonctions définies ci-dessous :

a $f_1(x) = f(x) - 3$ b $f_2(x) = f(x-2)$ c $f_3(x) = f(x+3) + 2$

➢ **Puis déterminez les coordonnées de centre de symétrie dans chaque cas.**

14 Utilisez la courbe de la fonction f telle que $f(x) = \frac{1}{x}$
pour tracer la courbe représentative de chacune des fonctions définies ci-dessous :

a $g(x) = f(x-3)$ b $g(x) = f(x) + 2$ c $g(x) = f(x-2) + 2$

15 Utilisez la courbe de la fonction f telle que $f(x) = x^2$
pour tracer la courbe représentative de chacune des fonctions définies ci-dessous :

a $f_1(x) = 4 - x^2$ b $f_2(x) = -(x-3)^2$ c $f_3(x) = 2-(x+3)^2$

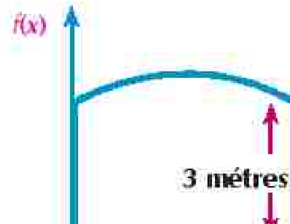
16 Utilisez la courbe de la fonction f telle que $f(x) = |x|$
pour tracer la courbe représentative de chacune des fonctions définies ci-dessous .

a $f_1(x) = 2 - |x|$ b $f_2(x) = -|x+5|$ c $f_3(x) = 4 - |x-2|$
d $f_4(x) = 2|x|$ e $f_5(x) = -2|x-1|$ f $f_6(x) = 5 - 2|x+2|$

17 En utilisant les transformations géométriques convenables, tracez la courbe représentative de la fonction f définie ci-dessous. Puis étudiez le sens de variation de f dans chacune des cas.

a $f_1(x) = \begin{cases} x^2+2 & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x^2-2 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$ b $f_2(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{si} \quad -4 \leqslant x < 0 \\ -x^2-1 & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 4 \end{cases}$

18 **En lien avec l'industrie :** Dans la figure ci-contre : Les deux hauteurs latérales d'un portail métalique bombé est de 3 mètres de longueur chacune et la forme de son arc superieure suit la courbe de la fonction f telle que $f(x) = a(x-2)^2 + 4$ Trouvez:



a La valeur de a c la largeur de la portail
b la hauteur maximale de la portail

19 **En lien avec la géométrie la commerce :** Un commerçant de céréales paye 50 livres égyptiennes pour chaque tonne entré ou sorti de son entrepôt comme frais de chargement. Ecrivez la règle de la définition de la fonction qui exprime le cout de chargement et représente-la graphiquement.

20 **En lien avec les nouvelles communautés urbaines :** On a privé des parcelles de terrains rectangulaires pour l'hebergement des jeunes gens dans une des nouvelles communautés urbaines. Si la longueur de chaque parcelle est x mètres et son aire est 400 mètres carrés .

a Ecrivez la règle de la fonction qui exprime la largeur du terrain en fonction de sa longueur et représentez-la graphiquement

b Du graphique, trouvez la longueur du terrain dont la largeur est 25m. Vérifiez cela algébriquement.

Unité 1

1 - 5 Equations et inéquations



Allez apprendre

- Résolution des équations de la valeur bsolue graphiquement.
- Résolution des équations de la valeur absolue algébriquement.
- Résolution des inéquations de la valeur absolue graphiquement.
- Résolution des inéquations de la valeur absolue algébriquement.
- Modélisation des problèmes et des applications quotidiennes et sa résolution en utilisant les équations et inéquation de la valeur absolue



Vocabulaires de base

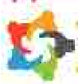
- Equation
- Inéquation
- Résolution graphique



Aides pédagogiques

- Feuilles quadrillées
- Logiciels de graphisme,

(I) Résolution des équations



Réflichissez et discutez

Dans un même repère tracez les courbes représentatives de deux fonctions f et g où f est la fonction de valeur absolue et g est fonction affine Observez le graphique puis répondre :

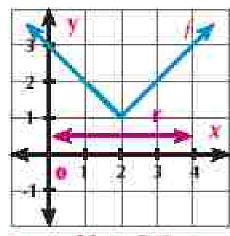
a Quel est le nombre des points probable d'intersection de deux courbes ?

b Les points d'intersection de deux courbes, vérifient–ils tes règles de deux fonctions?

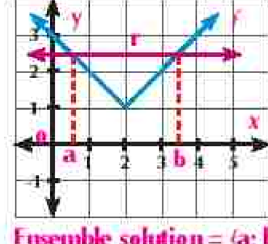
Remarquez que :

1) Aux points d'intersections, s'ils existent, on a : $f(x) = g(x)$, et réciproquement pour tout x appartenant à l'ensemble de définition commune de deux fonction.

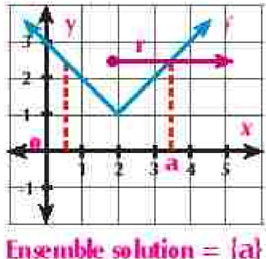
2) Pour deux fonctions f et g l'ensemble solution de l'équation $f(x) = g(x)$ est l'ensemble des abscisses de points d'intersection comme il est indiqué dans les figures suivantes:



Ensemble solution = ϕ



Ensemble solution = {a; b}



Ensemble solution = {a}

Résolution de l'équation : $|a\,x + b| = c$



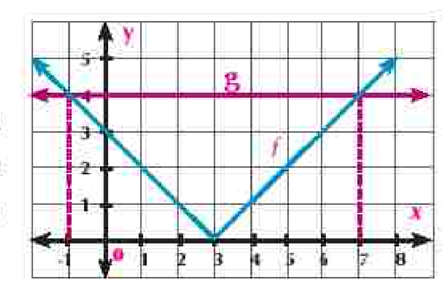
Exemple

① Résoudre l'équation: $|x - 3| = 4$ graphiquement et algébriquement.

Solution

Posons $f(x) = |x - 3|$ et $g(x) = 4$

1) On trace la courbe de la fonction $f(x) = |x - 3|$ en déplaçant la courbe de la fonction $f(x) = |x|$ trois unités dans la direction de $\overrightarrow{ox}$



2) Dans le même quadrillage, on trace la courbe de la fonction $g(x) = 4$ qui est une fonction constante. Sa représentation graphique est une droite parallèle
à l'axe des abscisse et passant par le point de coordonnées (0; 4)
∵ Les coordonnés des points d'intersection des deux courbes sont (-1 ; 4) , (7 ; 4)
∴ L'ensemble solution de l'équation est : {-1 ; 7}

Solution algébrique :
D'après la définition de la fonction valeur absolue : $f(x) = \begin{cases} x - 3 & \text{si} \quad x \geqslant 3 \\ -x + 3 & \text{si} \quad x < 3 \end{cases}$

Pour $x > 3$: $x - 3 = 4$ c'est-à-dire : $x = 7 \in]3 ; \infty[$
Pour $x \geqslant 3$: $-x + 3 = -4$ c'est-à-dire : $x = -1 \in]-\infty ; 3]$
L'ensemble solution de l'équation est : **{ - 1 ; 7}** ce qui confirme la solution graphique.

 **Essayez de résoudre**

(1) Résoudre chacune des équations suivantes graphiquement et algébriquement.

(a) $|x| - 4 = 0$ (b) $|x| + 1 = 0$ (c) $|x - 7| = 5$

Quelques propriétés de la valeur absolue d'un nombre

A apprendre

1) $|ab| = |a| \times |b|$ Par exemple :
$|2 \times -3| = |-6| = 6$ et $|2| \times |-3| = 2 \times 3 = 6$

2) $|a + b| \geqslant |a| + |b|$
L'égalité est obtenue si les deux nombres **a , b** sont de même signe. Par exemple :
$|4 + 5| = |4| + |5| = 9$ et $|-4 - 5| = |-4| + |-5| = 9$

3) $|x|^2 = |x^2| = x^2$

Remarquez que :

1) Si $|x| = a$ alors $x = a$ ou $x = -a$ pour tout $a \in \mathbb{R}^+$
2) Si $|a| = |b|$ alors $a = b$ ou $a = -b$ pour tout $a \in \mathbb{R}$; $b \in \mathbb{R}$
3) $|a - x| = |x - a|$

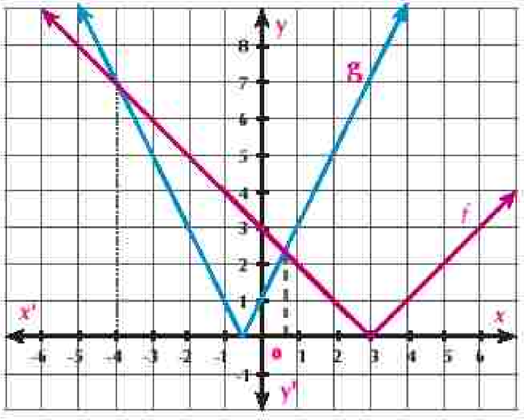
Résolution de l'équation: $|ax + b| = |cx + d|$



(2) Résoudre l'équation $|x - 3| = |2x + 1|$ graphiquement.

Solution

Posons $f(x) = |x - 3|$ et $g(x) = |2x + 1|$
La courbe de la fonction f et le même que la courbe de $|x|$ Par une translation d'amplitude trois unités dans la direction de $\overrightarrow{ox}$



$\because g(x) = |2x + 1| = |2(x + \frac{1}{2})|$

$\therefore g(x) = 2|x + \frac{1}{2}|$

La courbe de la fonction $f(x) = |x - 3|$ et le même que la courbe de $2|x|$ en la déplaçant horizontalement $\frac{1}{2}$ unités dans la direction de $\overrightarrow{ox'}$ Les coordonnées des points d'intersection des courbes des deux fonctions f et g sont: $(-4 ; 7)$ et $(\frac{2}{3} ; \frac{5}{2})$

L'ensemble solution de l'équation est $\{-4 ; \frac{2}{3}\}$

Essayez de résoudre

2. Résoudre graphiquement chacune des équations suivantes.

a) $|x + 7| = |2x + 3|$ b) $|x - 2| + |x - 1| = 0$

Exemple

3. Trouver algébriquement l'ensemble solution de chacune des équations suivantes :

a) $|x + 7| = |x - 5|$ b) $\sqrt{x^2 + 6x + 9} = |9 - 2x|$

Solution

a) $\because |x + 7| = |x - 5|$ $\therefore x + 7 = \pm(x - 5)$

$\therefore x + 7 = x - 5$ **mais** $7 = -5$ **(impossible).**

ou $x + 7 = -x + 5$ **et donc :** $2x = -2$

$\therefore x = -1$ Donc l'ensemble solution est $\{-1\}$



Remarque

pour tout a $\in \mathbb{R}$ et b $\in \mathbb{R}$ si $|a| = |b|$ alors: $a = \pm b$

Vérification:

En posant $x = -1$ dans les deux membres de l'équation, on trouve que :

Membre de gauche = Membre de droite = 6. Donc l'ensemble solution est $\{-1\}$

b) $\because \sqrt{x^2 - 6x + 9} = |9 - 2x|$

$\therefore \sqrt{(X - 3)^2} = |9 - 2x|$ c'est à dire $\therefore |x - 3| = |9 - 2x|$

On a donc: $x - 3 = \pm(9 - 2x)$

$\therefore x - 3 = 9 - 2x$, $3x = 12$ et donc $-x = 4$

Ou $x - 3 = -9 + 2x$, $x = 6$

Par substitutions des valeurs de x dans les deux membres de l'équation

Si $x = 4$ le membre gauche = le membre droite = 1 $\therefore x = 4$ est une solution de l'équation

Si $x = 6$ le membre gauche = le membre droite = 3 $\therefore x = 6$ est une solution de l'équation

L'ensemble solution est : $\{4; 6\}$

Remarque

pour tout a $\in \mathbb{R}$ ou a $\sqrt{a^2} = |a|$

Essayez de résoudre

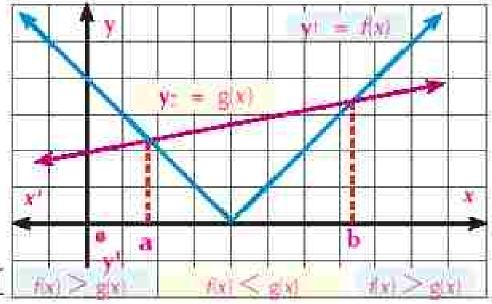
(3) Trouver algébriquement l'ensemble solution de chacune des équations suivantes:

(a) $|x - 1| - 2\,|2 - x| = 0$ (b) $\sqrt{x^2 - 4x + 4} = 4$

(II) Résolution des inéquations

Vous avez déjà étudié les équations. Une in équation est une proposition mathématique qui contient l'un des symboles : ($<$; $>$; $\leqslant$; $\geqslant$) Résoudre une in équation consiste à trouver l'ensemble des valeurs de l'inconnue qui rendent l'inégalité vraie.

Résolution des inéquations graphiquement



La figure ci-contre montre les courbes représentatives de deux fonctions f et g où: $y_1 = f(x)$ et $y_2 = g(x)$

L'ensemble solution de l'équation $f(x) = g(x)$ est {a ; b}

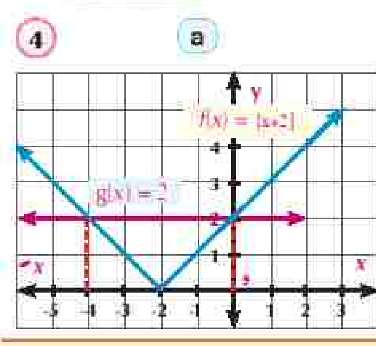
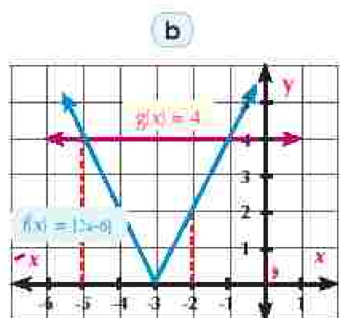
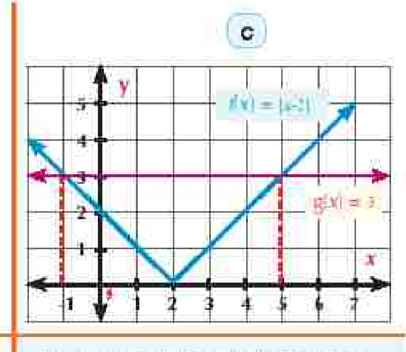
C'est-à-dire que: $y_1 = y_2$ si $x =$ a ou $x =$ b

On remarque que: $y_1 < y_2$ C.à.d. $f(x) < g(x)$ si $x \in]a\,;\,b[$

$y_1 > y_2$ C.à.d. $f(x) > g(x)$ si $x \in]-\infty\,;\,a[\cup]b\,;\,+\infty[$

Exemple

(4)

a	b	c
		
Ensemble solution de l'inéquation $\|x + 2\| < 2$ est : $]-4\,;\,0[$	Ensemble solution de l'inéquation $\|2x + 6\| > 4$ est : $]-\infty\,;\,-5] \cup [-1\,;\,+\infty[$ **ou:** $\mathbb{R} -]-1\,;\,5[$	Ensemble solution de l'inéquation $\|x - 2\| \leqslant 3$ est : $[-1\,;\,5]$

Essayez de résoudre

(4) Trouvez l'ensemble solution de chacune des in équations suivantes en vos aidant par les figures de l'exemple (7):

(a) $|x + 2| \leqslant 2$ (b) $|2x + 6| \leqslant 4$ (c) $|x - 2| > 3$

Résolution des inéquations algébriquement



A apprendre

(I): Si $|x| \leqslant a$ et $a > 0$ **alors:** $-a \leqslant x \leqslant a$

(II): Si $|x| \geqslant a$ et $a > 0$ **alors:** $x \geqslant a$ **ou** $x \leqslant -a$

Exemple

(5) Trouver, sous la forme d'un intervalle, l'ensemble solution de chacune des inéquations suivantes:

(a) $|x - 3| < 4$ (b) $\sqrt{x^2 - 2x + 1} \geqslant 4$

Solution

(a) $\because |x - 3| < 4$ **c.à.d.** $-4 < x - 3 < 4$

En ajoutant 3 aux membres de la double inégalité

$\therefore -4 + 3 < x - 3 + 3 < 4 + 3$ **c.à.d.** $-1 < x < 7$

$\therefore$ **L'ensemble solution** $=]-1\ ;\ 7[$

(b) $\because \sqrt{(x-1)^2} = |x - 1|$ d'où $|x - 1| \geqslant 4$

$\therefore x - 1 \geqslant 4$ donc $x \geqslant 5$; $x - 1 \geqslant -4$ **donc** $x \geqslant -3$

$x \in \mathbb{R} -]-3\ ;\ 5[$

$\therefore$ **L'ensemble solution est** $]-\infty\ ;\ -3] \cup [5\ ;\ +\infty[$

Rappel

pour tout a , b , c

si: $a < b$, $b < c$ alors $a < c$

si: $a < b$ alors

$a + c < b + c$

$a\,c < b\,c$ en $c > 0$

$a\,c > b\,c$ en $c < 0$

Essayez de résoudre

(5) Trouver, sous la forme d'un intervalle, l'ensemble solution de chacune des in équations suivantes :

(a) $|x - 7| < 11$ (b) $|3x + 7| \leqslant 8$ (c) $\sqrt{x^2 - 6x + 9} \geqslant 8$

Pensé critique : Ecrivez sous la forme d'un intervalle de valeur absolue pour ce qui suit:

(a) $4 \leqslant x \leqslant -4$ (b) $x \leqslant -2\ ;\ x \geqslant 2$ (c) $0 < x < 6$

Applications quotidienne

Exemple

Meteorologique Un jour

(6) La station Meteorologique a enregistrée la température sur le Caire, elle a trouvé 32° ce qui est different par 7° de taux normale dans ce jour. Quel est le degré de témperature probable sur le Caire dans ce jour ?

Solution

Supposons que le degré de témperature probable sur le Caire dans ce jour $= x°$

$\therefore |x - 32| = 7$ c'est-à-dire que $x - 32 = \pm 7$

Alors $x = 32 + 7 = 39$ ou $x = 32 - 7 = 25$

C'est-à-dire que le degré de température probable sur le Caire dans ce jour est $39°$ ou $25°$

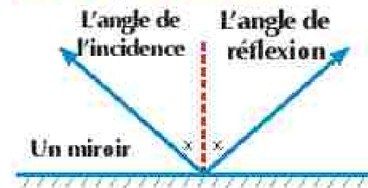
Essayez de résoudre

6) **Médecine sportive :** Le poids de Bassem est différent du poids normal correspondant à sa taille par 5 kilogrammes. Quel est le poids probable de Bassem si son poids naturel est 60 kilogrammes?

Exemple Employs vacant

7) Une société de gaz naturel nomme les lecteurs des compteurs suivant leurs tailles. On accepte les candidats dont la taille est de 178 à 192 cm. Exprimez les tailles possibles des candidats qui se présentent pour occuper le poste par une inéquation en utilisant la valeur absolue.

Solution



Supposons que la taille du candidat = x cm

$\therefore 178 \leqslant x \leqslant 192$

en ajoutant -185 aux membres de l'inéquation :

$178 - 185 \leqslant x - 185 \leqslant 192 - 185$

$-7 \leqslant x - 185 \leqslant 7$ c.à.d. $|x - 185| \leqslant 7$

Essayez de résoudre

7) Ecrivez l'inéquation de la valeur absolue qui exprime :

La note d'un étudiant dans un examen est de 60 à 100 points

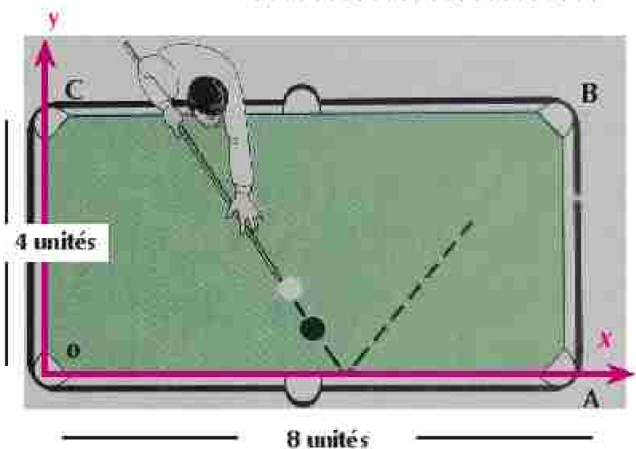
Activité Utilisé les fonctions pour résoudre de problèmes mathématique, et de la vie courante

L'angle de l'incidence
L'angle de réflexion
Un miroir

Remarquez que: Si un rayon de lumière est projeté sur une surface réfléchissante (un miroir), la trajectoire du rayon lumineux est soumise à la fonction valeur absolue de telle sorte que l'angle de l'incidence soit égal à l'angle de réflexion. Comme la trajectoire d'une balle de billard avant après le choc avec la bande de billard dans certains cas.

La figure ci-contre : montre que le joueur de billard tire vers la bille noire. Considérons que $\overrightarrow{ox}$ et $\overrightarrow{oy}$ les deux axes de coordonnées et la trajectoire du balle est définie par la fonction $f(x) = \frac{4}{3}|x - 5|$

Est-ce que la bille noire va tomber dans le trou B ? Justifiez votre réponse.





Exercices (1 - 5)



Complétez ce que suit :

1. L'ensemble solution de l'équation $|x| = \frac{1}{2}$ est ....
2. L'ensemble solution de l'équation $|x| + 3 = 0$ est ....
3. L'ensemble solution de l'équation $|x - 2| \geqslant 0$ est ....

Choisissez de la liste suivante l'ensemble solution convenable de chaque équation ou inéquation de ce qui suit :

4. $|x - 2| = 3$
5. $|x - 2| < 3$
6. $|x - 2| > -3$
7. $|x - 2| \leqslant 3$
8. $|x - 2| > 3$
9. $|x - 2| = -3$

- a) $]-1 ; 5[$
- b) $\mathbb{R}$
- c) $\{-1 ; 5\}$
- d) $\mathbb{R} - [-1 ; 5]$
- e) ϕ
- f) $[-1 ; 5]$

Trouver algébriquement l'ensemble solution de chacune des équations suivantes :

10. $|x + 3| = 6$
11. $|2x - 7| = 5$
12. $|3 - 2x| = 7$
13. $|x - 3| = |x + 1|$
14. $|2x + 1| = |x - 3|$
15. $\sqrt{x^2 - 2x + 1} = 4$

Trouver graphiquement l'ensemble solution de chacune des équations suivantes :

16. $|x + 4| = 3$
17. $|x - 1| = |x + 3|$
18. $|2x - 5| = 3$

Trouver graphiquement l'ensemble solution de chacune des inéquations suivantes:

19. $|x - 1| < 3$
20. $|x - 2| \leqslant 5$
21. $|x + 3| > 2$

Trouver algébriquement l'ensemble solution de chacune des inéquations suivantes:

22. $|2x - 1| > 3$
23. $|2x + 3| \leqslant 7$
24. $|3x - 7| \geqslant 2$

25. **Réseaux routière :** Deux routes, la première est représentée par la courbe de la fonction f où $f(x) = |x - 4|$, et la deuxième est représentée par la courbe de la fonction g où $g(x) = 3$; Si les deux routes se coupent aux deux points A et B, trouver la distance entre A et B à un kilo mètre prés sachant que l'unité de longueur représente une distance de 5 km.

26. Ecrivez l'inéquation de la valeur absolue qui exprime : la température mesurée par le thermomètre médical comprise entre 35 °; 42 °.

Résumé de l'unité

1 **Fonction :** C'est une relation entre deux ensembles non vides X et Y telle que pour chaque élément de l'ensemble x il existe une seule image dans l'ensemble Y , Cette relation s'écrit sous la forme de $f: X \longrightarrow Y$; Une fonction est déterminée par trois éléments : son ensemble de définition, son ensemble d'arrivée et son expression algébrique

2 **Le test de la droite verticale :** Dans la représentation graphique d'une relation par un ensemble de points dans un repère orthogonal, si toute droite verticale passant par un élément de son ensemble de définition coupe la représentation en un seul point alors cette relation est une fonction.

3 **Fonction définie par morceaux :** C'est une fonction réelle, pour des parties de son ensemble définition sont attribuées des règles de définitions différentes.

4 **Sens de variation d'une fonction :** Une fonction est dite croissante sur]a ; b[si pour tout x_1 et x_2 appartenant à l'intervalle]a ; b[si $x_2 > x_1$ alors $f(x_2) > f(x_1)$;
Une fonction est dite f décroissante sur]a ; b[si pour tout x_1 et x_2 appartenant à l'intervalle]a ; b[si $x_2 > x_1$ alors $f(x_2) < f(x_1)$
Une fonction est dite f constante sur]a ; b[si pour tout x_1 et x_2 appartenant à l'intervalle]a ; b[si $x_2 > x_1$ alors $f(x_2) = f(x_1)$

5 **Fonction paire et fonction impaire :**

Fonction paire : On dit qu'une fonction est paire si $f(-x) = f(x)$ pour tout x et $-x \in$ appartenant à l'ensemble de définition.

Fonction impaire : On dit qu'une fonction est paire si $f(-x) = -f(x)$ pour tout x et $-x \in$ appartenant à l'ensemble de définition.

Propriétés importantes :

Soient f_1 et f_2 deux fonctions paires; g_1 et g_2 deux fonctions impaires, alors :

1) $f_1 + f_2$ fonction paire **2)** $g_1 + g_2$ fonction impaire.
3) $f_1 \times f_2$ fonction paire **4)** $g_1 \times g_2$ fonction paire.
5) $f_1 \times g_2$ fonction paire **6)** $f_1 + g_2$ ni paire ni impaire.

6 **Fonction affine :** La forme la plus simple : $f(x) = x$ (**fonction linéaire**) elle est représentée par une droit passant par le point de coordonnées (0 ; 0) et de pente = 1

7 **Fonction quadratique :** La forme la plus simple $f(x) = x^2$ (Fonction Carré), elle est représentée graphiquement par une parabole symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et le sommet de sa courbe est le point de coordonnées (0 ; 0).

8 **Fonction Cubique :** La forme la plus simple $f(x) = x^3$ (Fonction Cube), le point de coordonnées (0 ; 0) est le centre de symétrie de la courbe.

9 Fonction valeur absolue (Module)

La forme la plus simple $f(x) = |x|$, elle est définie par $f(x) = \begin{cases} x \text{ si} & x \geqslant 0 \\ -x \text{ si} & x < 0 \end{cases}$

elle représentée par deux demi-droites de même origine (0 ; 0) la pente de l'une = -1 et la pente de l'autre = -1. On a $|x| \geqslant 0$; $|-x| = |x|$; $\sqrt{x^2} = |x|$

10 Fonction rationnelle :

La forme la plus simple $f(x) = \frac{1}{x}$; (Fonction inverse) elle est représentée graphiquement par une hyperbole et le centre de symétrie de la courbe est le point de coordonnées (0 ; 0).

11 Transformations géométriques:

Les transformations géométriques de la fonction $y = f(x)$ sont déterminées comme suit :

- Si $y = f(x) + a$ où $a > 0$ représentée par une translation de la courbe de la fonction f dans la direction positive de l'axe des ordonnées d'amplitude a
- Si $y = f(x) - a$ où $a > 0$ représentée par une translation de la courbe de la fonction f dans la direction négative de l'axe des ordonnées d'amplitude a
- Si $y = f(x + a)$ où $a > 0$ représentée par une translation de la courbe de la fonction f dans la direction négative de l'axe des abscisses d'amplitude a.
- Si $y = f(x - a)$ où $a > 0$ représentée par une translation de la courbe de la fonction f dans la direction positive de l'axe des abscisses d'amplitude a.
- Si $y = f(x)$ représentée par une symétrie de la courbe de la fonction f par rapport à l'axe des abscisses.
- Si $y = a f(x)$ où $a > 1$ représentée par une dilatation verticale de la courbe de la fonction f de coefficient a. C'est un agrandissement si $a > 1$ et une réduction si $a < 1$

12 Les propriétés de la fonction valeur absolue :

a) $|a\,b| = |a| \times |b|$

b) $|a + b| \leqslant |a| + |b|$

c) Si $|x| \leqslant a$; $a > 0$ alors : $-a \leqslant x \leqslant a$

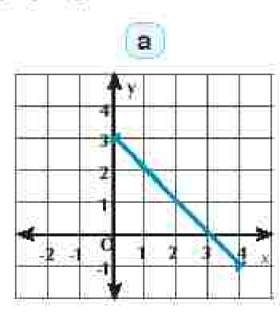
d) Si $|x| \geqslant a$; $a > 0$ alors : $x \geqslant a$ ou $x \leqslant -a$

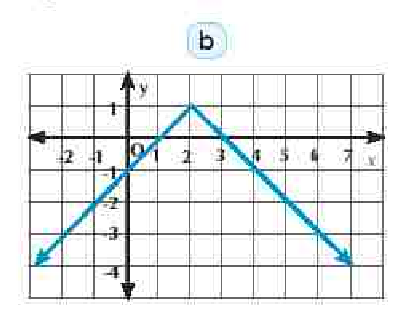
13) Solution de l'équation : Pour deux fonction f et g, l'ensemble solution de l'équation $f(x) = g(x)$ est l'abscisses des des points d'intersection de deux courbes des fonctions.

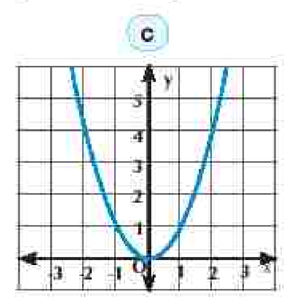
14) Solution de l'inéquation: est la détrmination des valeurs de la variable qui verifient l'iégalité.

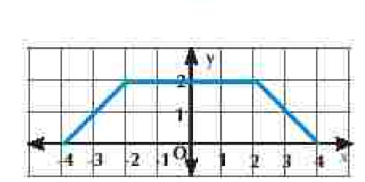
Exercices généraux

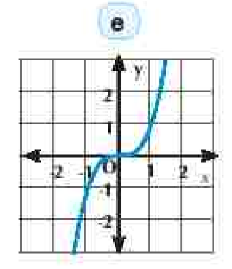
1 Les figures suivantes montrent les représentations graphiques de quelques fonctions. Du graphique, déduire l'ensemble image, étudier le sens de variation et la parité de chaque fonction:

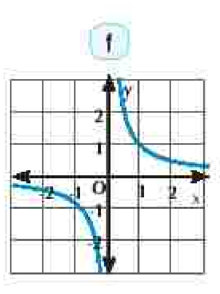
a


b


c


d


e


f


2 Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions réelles suivantes:

a $f_1(x) = 2x^3 + x + 3$ b $f_2(x) = \frac{2x}{x^2 - 2x - 3}$ c $f_3(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

3 Utilisez la courbe de la fonction f telle que $f(x) = |x|$ pour tracer la courbe représentative de chacune des fonctions définies ci-dessous:

a $g(x) = |x - 1|$ b $g(x) = 2 - |x|$ c $g(x) = |x + 2| - 3$

4 Utilisez la courbe de la fonction f telle que $f(x) = x^2$ pour tracer la courbe représentative de chacune des fonctions définies ci-dessous :

a $g_1(x) = x^2 - 3$ b $g_2(x) = 2 - x^2$ c $g_3(x) = (x - 2)^2 + 1$

Puis déterminez l'équation de l'axe de la symétrie dans chaque cas.

5 Utilisez la courbe de la fonction f telle que $f(x) = x^3$ pour tracer la courbe représentative de chacune des fonctions définies ci-dessous

a $g_1(x) = (x + 3)^3$ b $g_2(x) = -(x - 1)^3$ c $g_3(x) = (x - 1)^3 - 2$

Puis déterminez les coordonnées de centre de symétrie dans chaque cas.

6 Utilisez la courbe de la fonction f telle que $f(x) = \frac{1}{x}$; $x \neq 0$ pour tracer la courbe représentative de chacune des fonctions définies ci-dessous :

a $f_1(x) = \frac{1}{x} + 1$ b $f_2(x) = \frac{1}{x} - 2$ c $f_3(x) = \frac{1}{x - 2}$

d $f_4(x) = \frac{1}{x + 3}$ e $f_5(x) = \frac{1}{x - 2} + 1$ f $f_6(x) = \frac{2x - 1}{x}$

7 Trouver graphiquement l'ensemble solution de chacune des équations et des inéquations suivantes .

a $|x - 5| = 3$ b $|x - 5| < 3$ c $|x + 3| \geqslant 2$

d $|x - 1| = |x + 4|$ e $|x + 4| \leqslant 2$ f $\sqrt{x^2 + 2x + 1} > 3$

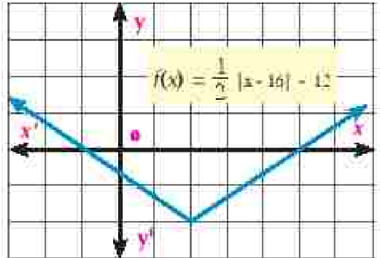
8 Trouver graphiquement et algébriquement l'ensemble solution de chacune des équations et des inéquations suivantes :

a $|x - 3| = 4$ b $|2x - 3| = 5$ c $|2x - 5| \leqslant 7$

d $|5 - x| > 3$ e $|x - 1| = |2x + 3|$ f $|x - 2| - 3 > 0$

9 Une usine de production du lait, produit de bouteilles de x gm pour vérifier la qualité de poids les bouteilles passent sur une ligne de surveillance de qualité du poids qui permet à passer les bouteilles de sorte qui $|x - 1600| \geqslant 15$ Déterminez le plus grand et le plus petit poids de bouteille qui l'usine distribue aux marchés.

10 La figure ci-contre montre la courbe de la fonction f définie par :
$f(x) = \frac{1}{2}\,|x - 16| - 12$
Choisissez des unités convenables pour les deux axes $\overrightarrow{ox}$ et $\overrightarrow{oy}$ Puis trouvez, graphiquement l'ensemble solution de l'équation $f(x) = 6$



Reflection créative :

11 Si l'ensemble solution de l'inéquation $|x| \leqslant$ a est ϕ quelle est les valeurs possible de a ? Quel sera l'ensemble solution de l'inéquation $|x| >$ a dans ce cas ?

12 La vitesse de l'aviation d'un avion est mesuré pendant la partie normale du voyage, c'ect à dire sans prendre en compt le décolage et l'attirissage de l'avion. Ecrivez l'inéquation de la valeur absolue qui exprime : La vitesse de l'avion se varie de 700 km/h à 900 km/h.



1. Tracez les courbes représentatives des fonctions f et g telles que $f(x) = x + 1$ et $g(x) = 5 - x$
Du graphique trpuvez:

   a. Les coordonnées des points d'intersections de chacune de deux courbes avec l'axe des abscisses.

   b. Les coordonnées des points d'intersections de deux courbes.

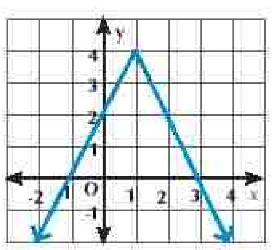
   c. L'aire du triangle formé par les deux droites et l'axe des abscisses.

2. Utilisez la courbe de la fonction f telle que $f(x) = |x|$ pour tracer la courbe de la fonction g où $g(x) = |x - 1| - 2$ puis trouvez l'ensemble image de la fonction et l'équation de l'axe de symétrie de la courbe.

3. Tracez la courbe représentative de la fonction f telle que $f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ si } -2 \leqslant x < 2 \\ 6 \text{ si } x \geqslant 2 \end{cases}$

   ➢ Déduisez l'ensemble définition de la fonction puis étudiez le sens variation de f.

4. Dans la figure ci-contre : Trouvez :



   a. Les coordonnées du sommet de la courbe.
   b. La règle de définition de la fonction.
   c. L'ensemble image puis étudiez le sens variation de f.
   d. L'équation de l'axe de symétrie de la courbe.

5. Tracez la courbe représentative de la fonction f telle que $f(x) = (x - 1)^3$
en éduisez l'ensemble définition , le sens variation et étudiez la parité de la fonction.

6. Utilisez la courbe de la fonction f telle que $f(x) = \frac{1}{x}$ pour tracer la courbe de la fonction g où $g(x) = f(x) + 2$ puis écrire les coordonnées du centre de la courbe de la fonction obtenue et étudiez son sens variation.

7. Soit la fonction f telle que $f(x) = \frac{1}{x+1}$. Trouvez l'ensemble définition et les coordonnées du cent de la courbe puis résoudre $f(\frac{1}{x}) = 4$

8. Trouvez graphiquement l'ensemble solution de

   a. $|x - 4| = 3$ b. $|x - 4| \geqslant 3$

9. Trouver algébriquement et graphiquement l'ensemble solution de chacune des équations et des inéquations suivantes :

   a. $|x + 5| = 9$ b. $\sqrt{4x^2 - 12x + 9} = |x + 1|$ c. $|2x - 5| \leqslant 7$
   d. $|3x + 1| > 7$

Unité 2

Puissance, Logrithmes et Applications

Introduction de l'unité

La notion des logarithmes a été introduite en mathématique à la fin par john Nabbier au début de 17ième siécle. Il l'a introduite comme un moyen pour simplifier certains calculs pour aider les marins, les savants et les ingenieurs à partir des outils performants (à l'époque) comme les règle du calcul et les tableaux des logarithmes. Léonhard Euler en 18ième siècle a decouvert des proprietées très utiles pour les praticiens. Parmi ces proprietées : déterminé le logarithme de produit de deuxnombres

loga xy = loga x + loga y, cela à partir une relation entre les exposants et les logarithmes. La notion des logaritmes est également util dans d'autres domaines par example le décibl qui est une unité logaritmique pour mesurer de l'intensité du son ainsi que le volte et la puissance hydrogène pour déterminer le niveau d'acide dans une solution en chemie.

Compétences attendues de l'unité

Compétences attendues de l'unité:

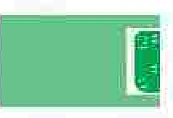
- Reconnaître la fonction exponentielle
- Reconnaître la représentation graphique de la fonction
- exponentielle et déduire ses propriétés
- Reconnaître les formules de puissance fractionnaires
- Résoudre des équations exponentielles sous la forme : ax = b
- Reconnaître la fonction logarithme.
- Transformer algébriquement de la forme exponentielle à la forme logarithmique et réciproquement.
- Reconnaître la fonction réciproque et la condition de son existence (test de la droite horizontale).
- Reconnaître la représentation graphique de d'une fonction sur des intervalles limités et déduire ses propriétés.
- Déduire la relation entre la fonction exponentielle et la fonction logarithme graphiquement.
- Reconnaitre les formules de logarithme.
- Résoudre des problèmes en appliquant les formules des logarithmes.
- Reconnaître les logarithmes usuels à base 10.
- Trouvez la valeur d'un logarithme en utilisant la calculatrice.
- Utiliser la calculatrice pour résoudre des équations exponentielles en utilisant le logarithme.

Vocabulaires de base



- Puissance nième
- Base
- Puissance
- Racines nième
- Exposant fractionnaires
- Fonction exponentielle
- Croissance exponentielle
  Décroissance exponentielle
- Ensemble de définition
- Ensemble image
- Symétrie
- Logarithme Equations logarithmiques
- Fonctions logarithmiques

Leçons de l'unité



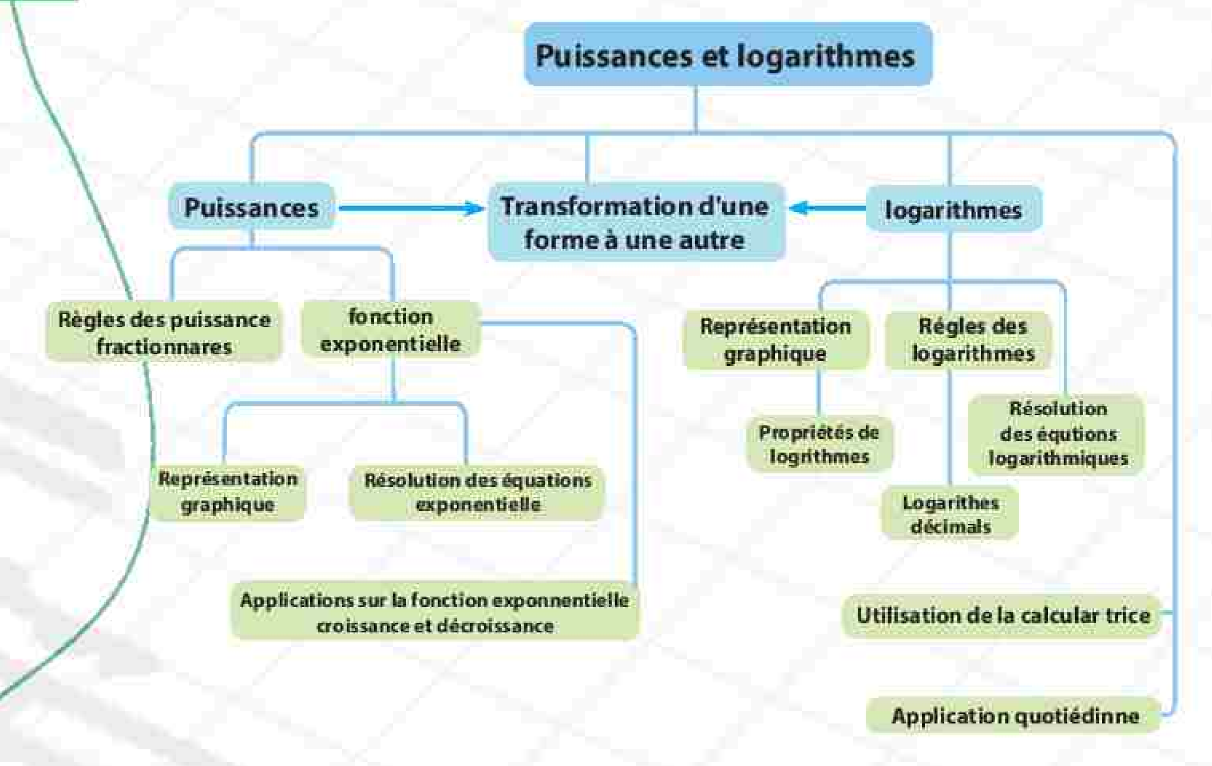
Leçon (2 - 1): Puissances fractionnaires
Leçon (2 - 2): Fonction exponentielle et applications
Leçon (2 - 3): Résolution des équations exponentielles
Leçon (2 - 4): Fonction logarithme et sa représentation graphique
Leçon (2 - 5): Quelques propriétés des logarithmes

Aides pédagogiques

Une calculatrice scientifique
– Logiciels Graphique

Organigramme de l'unité





Unité 2

2 - 1 Puissances fractionnaires



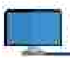
Allez apprendre

- Généralisation des formules de puissances.
- Racine nième.
- Formules de puissances frac- tionnaires



Vocabulaires de base

- Puissances $n^{ième}$
- Base
- Puissance
- Racine nième
- Exposant fractionnainnaires



Aides pédagogiques

- Calculatrice scientifique
- Logiciels de
- graphisme



Préliminaire

Vous avez déjà étudié les racines carrées d'un nombre réel non négatif et quelques propriétés des racines carrées et des racines cubiques ainsi que les puissances entières. Dans cette leçon, nous allons étudier les puissances fractionnaires.



A apprendre

Puissances entières:

définition 1

1) Pour tout $a \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a :

$a^n = a \times a \times a \times ..... \times a$ **(où le facteur a est répété n fois)**

(a^n) est appelé **la puissance $n^{ième}$** du nombre a où le nombre a est **appelé la base**, et le nombre n est la puissance. On dit que a **est élevé** à la puissance n.

2) $a = 1$ pour tout $a \in \mathbb{R} - \{0\}$

3) $a^{-1} = \frac{1}{a}$, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ $a \neq 0$

Propriétés de puissances entières:

Pour tout $m \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et $b \neq 0$ on a :

- $a^m \times a^n = a^{m+n}$
- $(ab)^n = a^n b^n$
- $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- $(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$
- $(a^m)^n = a^{mn}$



Exemple

① Mettez l'expression suivante sous la forme la plus simple $= \frac{(8)^{-3} \times (18)^2}{81 \times (16)^{-3}}$

Solution

$$\text{L'expression} = \frac{(2^3)^{-3} \times (2 \times 3^2)^2}{3^4 \times (^42)^{-2}} = \frac{2^{-9} \times 2^2 \times 3^4}{3^4 \times 2^{-8}}$$

$$= 2^{-9+2+8} \times 3^{4-4}$$

$$= 2^1 \times 3^0 = 2 \times 1 = 2$$



Essayez de résoudre

1. Mettez l'expression sous la forme la plus simple : $\dfrac{(27)^{-3} \times (12)^{2}}{16 \times (81)^{-2}}$

2. Démontrez que : $\dfrac{2^x \times 9^{x+1}}{3 \times 18^x} = 3$

A apprendre

Racine n^ième^

Vous avez déjà étudié que la racine carré est l'opération inverse du carré du nombre, de même la racine nième d'un nombre est l'opération inverse de l'opération d'élevé ce nombre à la puissance n.

Exemple :

1. Si $x^3 = 8$ alors 2 est la racine cubique de 8 c'est-à-dire $\sqrt[3]{8} = 2$
2. Si $x^5 = 32$ alors 2 est la racine cinquième de 32 c'est-à-dire $\sqrt[5]{32} = 2$
3. Si $x^n = a$ alors x est la racine nième de a c'est-à-dire $\sqrt[n]{a} = x$

définition

Pour un nombre réelle $a \geq 0$, $n \in \mathbb{Z}^+ - \{1\}$ **on** $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

Cette relation est aussi valable si $a < 0$, n et n est un nombre impair supérieur à 1

Exemple :

$(16)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{16} = 2$ $\qquad (-9)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-9} \notin \mathbb{R}$

$-(27)^{\frac{1}{3}} = -\sqrt[3]{27} = -3$ $\qquad (-243)^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{-243} = -3$



Exemple

2. Si $x^n = a$, trouvez les valeurs de x dans $\mathbb{R}$, s'il existe dans chacun des cas suivants :

   a) $n = 5$, $a = 0$ b) $n = 4$, $a = 81$

   c) $n = 2$, $a = -4$ d) $n = 3$, $a = -8$

Solution

a) **Lorsque** $n = 5$ et $a = 0$ alors $x^5 = 0$ **d'où** $x = \sqrt[5]{0} = 0$

b) **Lorsque** $n = 4$ et $a = 81$ alors $x^4 = 81$ **d'où** $x = \pm\sqrt[4]{81} = \pm 3$

c) **Lorsque** $n = 2$ et $a = -4$ alors $x^2 = -4$ **d'où** $x = \pm\sqrt{-4} \notin \mathbb{R}$

d) **Lorsque** $n = 3$ et $a = -8$ alors $x^3 = -8$ **d'où** $x = \sqrt[3]{-8} = -2$

De l'exemple précédent, on déduit que :

n	a	$\sqrt[n]{a}$
$n \in N^{+} - \{1\}$	$a = 0$	$\sqrt[n]{a} = 0$
est nombre pair et positif	$a > 0$	il y a deux racines réelles $\pm \sqrt[n]{a}$
est nombre pair et positif	$a < 0$	il n'y a pas de racines réelles.
est nombre impair et positif, $n \neq 1$	$a \in R$	il y a une seule racine réelle $\sqrt[n]{a}$

Essayez de résoudre

3) Trouvez les valeurs de x s'il existe dans chacun des cas suivants :

a) $x^2 = 36$ b) $x^5 = -32$ c) $x^3 = 125$

d) $x^4 = 1296$ e) $x^2 = -49$ f) $x^7 = -128$

4) **Réflexion critique** : Donnez un exemple numérique qui montre la différence entre la racine 6ième du nombre a et $\sqrt[6]{a}$

définition 3

Si $n \in Z^{+} - \{1\}$, $m \in \mathbb{Z}^{+}$, $\sqrt[n]{a} \in \mathbb{R}$ alors : $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$

Exemple :

$(16)^{\frac{3}{2}} = (\sqrt{16})^3 = (4)^3 = 64$

$\sqrt[3]{(-125)^2} = (\sqrt[3]{(-125)})^2 = (-5)^2 = 25$

Exemple

3) Trouvez sous la forme la plus simple :

a) $-\sqrt[3]{8\,a^6\,b^9}$ b) $\pm\sqrt{64\,(a^2+3)^6}$

Solution

a) $-\sqrt[3]{8\,a^6\,b^9} = -\sqrt[3]{(2\,a^2\,b^3)^3} = -2\,a^2\,b^3$

b) $\pm\sqrt{64\,(a^2+3)^6} = \pm\sqrt{[8(a^2+3)^3]^2}$

$= \pm 8\,(a^2+3)^3$

Essayez de résoudre

5) Trouvez sous la forme la plus simple :

a) $\sqrt[4]{625\,a^{12}}$ b) $\sqrt[5]{-243\,b^5}$ c) $\sqrt[7]{128\,(a+b)^7}$

Utilisé la valeur absolue

On utilise la valeur absolue si l'indice de la racine si n est un nombre pair, on écrit $\sqrt[n]{a^n} = |a|$

Si l'indice de la racine si n est un nombre impair, il n'est pas nécessaire d'utiliser la valeur absolue.

$$\sqrt[n]{x^n} = \begin{cases} |x| & \text{si n est pair.} \\ x & \text{si n est impair.} \end{cases}$$



Exemple

4 Trouvez sous la forme la plus simple :

a) $\sqrt{9x^2}$ b) $\sqrt[3]{-8x^3}$

c) $\sqrt[4]{(2-\sqrt{3})^4}$ d) $\sqrt[2]{(1-\sqrt{7})}$



Remarque

le carré des nombres (a) et (-a) est a^2

Solution

a) $\sqrt{9x^2} = \sqrt{(3x)^2} = |3x|$

b) $\sqrt[3]{-8x^3} = \sqrt[3]{(-2x)^3} = -2x$

c) $\sqrt[4]{(2-\sqrt{3})^4} = |2-\sqrt{3}| = 2-\sqrt{3}$ où $2 > \sqrt{3}$

d) $\sqrt[2]{(1-\sqrt{7})} = |1-\sqrt{7}| = \sqrt{7}-1$ où $\sqrt{7} > 1$

Essayez de résoudre

6 Trouvez sous la forme la plus simple :

a) $\sqrt[4]{16a^{12}}$ b) $\sqrt[6]{(x-2)^{18}}$

c) $\sqrt[3]{(2-\sqrt{5})^3}$ d) $\sqrt[4]{(2-\sqrt{5})^4}$

définition 4

Si $n \in Z^+ - \{1\}$, $m \in Z^+$, $\sqrt[n]{a} \in \mathbb{R}$ alors: $a^{-\frac{m}{n}} = \dfrac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$

Exemple : $7^{-\frac{3}{5}} = \dfrac{1}{7^{\frac{3}{5}}}$, $\dfrac{1}{4^{-\frac{2}{3}}} = 4^{\frac{2}{3}}$

définition 5

Si $n \in \mathbb{N}^+ - \{1\}$, $\sqrt[n]{a}$, $\sqrt[n]{b}$ deux nombres réelles alors:

- $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}$
- $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ où $b \neq 0$



Exemple

(5) Trouvez sous la forme la plus simple :

a $\dfrac{\sqrt{8} \times 4^{-1} \times 2^{-\frac{3}{2}}}{6^{-2} \times 3^{2}}$

b $\dfrac{32^{\frac{3}{5}} \times 8^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[4]{4} \times \sqrt[8]{16^{5}}}$

Solution

a L'expression $= \dfrac{8^{\frac{1}{2}} \times 4^{-1} \times 2^{-\frac{3}{2}}}{6^{-2} \times 3^{2}}$ Transformation des fractions en puissances fractionnaires

$= \dfrac{(2^{3})^{\frac{1}{2}} \times (2^{2})^{-1} \times 2^{-\frac{3}{2}}}{(3 \times 2)^{-2} \times 3^{2}}$ Décompositions des bases en facteurs premiers.

$= \dfrac{(2)^{\frac{3}{2}} \times 2^{-2} \times 2^{-\frac{3}{2}}}{3^{-2} \times 2^{-2} \times 3^{2}}$ En simpifiant

$= 2^{\frac{3}{2} - 2 - \frac{3}{2} + 2} \times 3^{2 - 2}$

$= 2^{\text{zéro}} \times 3^{\text{zéro}} = 1$

b L'expression $= \dfrac{32^{\frac{3}{5}} \times 8^{\frac{2}{3}}}{4^{\frac{1}{4}} \times 16^{\frac{5}{8}}}$ Transformation des fractions en puissances fractionnaires.

$= \dfrac{(2^{5})^{\frac{3}{5}} \times (2^{3})^{\frac{2}{3}}}{(2^{2})^{\frac{1}{4}} \times (2^{4})^{\frac{5}{8}}}$ Décompositions des bases en facteurs premiers.

$= \dfrac{2^{3} \times 2^{2}}{2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{5}{2}}} = 2^{3 + 2 - \frac{1}{2} - \frac{5}{2}} = 2^{2} = 4$

Essayez de résoudre

(7) Trouvez sous la forme la plus simple :

a $\dfrac{\sqrt[5]{243} \times \sqrt{8^{-1}}}{\sqrt{2} \times \sqrt[3]{9}}$

b $\dfrac{\sqrt[4]{4} \times \sqrt[3]{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt[6]{4}}$

Résolution des équation :



Exemple

(6) Trouvez l'ensemble solution, dans $\mathbb{R}$ de chacune des équations suivantes :

a $x^{\frac{2}{3}} = 9$

b $(x + 1)^{\frac{3}{4}} = 8$

Solution

a $\because x^{\frac{2}{3}} = 9$ élévant les deux membres à la puissance 3

$\therefore (x^{\frac{2}{3}})^{3} = 9^{3}$

$\therefore x^{2} = 9^{3}$ prenant la racine carré de deux membres

$\sqrt{x^{2}} = \sqrt{9^{3}}$

$\therefore |x| = 3^{3}$

$\therefore x = \pm 27$ $\quad \therefore$ E.S $= \{27; -27\}$

b $(x+1)^{\frac{3}{4}} = 8$ **élévant les deux membres à la puissance 4**

$\therefore (x+1)^3 = 8^4$

$\therefore (x+1) = (\sqrt[3]{8})^4$

$\therefore x+1 = 2^4$ $\quad\therefore x = 15$ $\quad\therefore$ E.S $= \{15\}$

Essayez de résoudre

8) Trouvez l'ensemble solution, dans ℝ de chacune des équations suivantes :

a $x^{\frac{5}{2}} = 32$ **b** $\sqrt[3]{(x-1)^5} = \frac{1}{32}$



Exemple

7) **En lien avec la géométrie:** La longueur du coté d'un carré est ℓ et d'aire A est donnée par la relation $\ell = m^{\frac{1}{2}}$

a Calculez la longueur du coté d'un carré de 25 cm^2 d'aire

b Calculez la longueur du coté d'un carré de 17 cm^2 d'aire, donnez une valeur approchée à un décimal près.

Solution

a $\ell = 25^{\frac{1}{2}} = \sqrt{25} = 5\text{cm}$ **b** $\ell = 17^{\frac{1}{2}} = \sqrt{17} \simeq 4.12310$

En approchant à un décimal près $\therefore \ell \simeq 4.1\text{cm}$

Essayez de résoudre

9) Si la longueur d'arête d'un cube est ℓ et son volume V est donnée par la relation $\ell = V^{\frac{1}{3}}$
Trouvez la longueur de l'arêt d'un cube de volume égale à 27



Exercice 2 - 1

1) **Ecrivez ce qui suit sous la forme exponentielle :**

a $\sqrt[3]{x}$ **b** $\sqrt[4]{a^3}$ **c** $2\sqrt[3]{n}$

d $\sqrt[4]{a^2 b^3}$ **e** $\sqrt[3]{\sqrt{y}}$ **f** $\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[5]{x^2}}$

2) **Ecrivez ce qui suit sous la forme radicale :**

a $a^{\frac{1}{2}}$ **b** $b^{\frac{2}{3}}$ **c** $6\,y^{\frac{3}{4}}$

d $8\,b^{\frac{4}{9}}$ **e** $(3\,x)^{-\frac{2}{3}}$ **f** $5^{\frac{2}{3}} \times 25^{\frac{1}{2}}$

3) **Ecrivez ce qui suit sous la forme la plus simple :**

a $(16)^{\frac{3}{4}}$ **b** $(-32)^{\frac{3}{5}}$ **c** $27^{-\frac{4}{3}}$

d $(\frac{1}{8})^{\frac{2}{3}} + (\frac{1}{4})^{\frac{1}{2}}$ **e** $\frac{\sqrt[4]{4}}{\sqrt{2}}$ **f** $\frac{1}{(2^{-2} \times 4^{\frac{1}{2}} \times 8^{\frac{2}{3}})^{-2}}$

4 **Trouvez les résultats des opérations suivantes sous la forme la plus simple :**

a) $(a^{\frac{2}{3}})^{-3}$ b) $\sqrt[3]{x} \times x^{\frac{1}{2}}$ c) $(3^2 + 4^2)^{\frac{1}{2}}$

d) $(x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}})(x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}})$ e) $(x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}})(x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{2}{3}})$

f) $(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}})^2$ g) $(1^3 + 2^3 + 3^3)^{\frac{1}{2}}$

5 **Trouvez ce qui suit sous la forme la plus simple :**

a) $\sqrt[5]{243} + \sqrt[9]{512}$ b) $(\frac{16}{81})^{\frac{1}{2}} \times (\frac{729}{8})^{\frac{1}{3}}$ c) $(16)^{\frac{2}{3}} : (8)^{\frac{2}{3}}$

d) $(27)^{\frac{2}{3}} - (64)^{\frac{5}{6}}$ e) $\sqrt{0.1} \times \sqrt[3]{0.216} \times \sqrt{2.5}$ f) $\dfrac{8^{\frac{3}{8}} \times 4^{-\frac{3}{16}}}{2^{-\frac{5}{4}}}$

g) $(125)^{\frac{2}{3}} \times 81^{\frac{1}{4}} \times (15)^{-1}$ h) $\dfrac{16^{x-\frac{1}{4}} \times 9^{x+\frac{1}{2}}}{8^{x-1} \times 18^{x+2}}$

Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées:

6 Si $\sqrt[3]{x^2} = 9$ alors $x \in$

a) $\{27\}$ b) $\{27; -27\}$ c) $\{1\}$ d) ϕ

7 $64^{-\frac{1}{6}} =$

a) 2 b) -2 c) $\frac{1}{2}$ d) $-\frac{1}{2}$

8 $\sqrt[3]{x^{-3}} =$

a) x^{-1} b) $-x$ c) $|x^{-1}|$ d) $-|x|$

9 $\sqrt[4]{x^4 y^8} =$

a) $x\, y^2$ b) $\pm x\, y^2$ c) $|x|\, y$ d) $x\, |y^2|$

10 Si $x^{\frac{3}{2}} = 8$ alors $x =$

a) 4 b) -4 c) $\frac{1}{4}$ d) $-\frac{1}{4}$

11 $\dfrac{6^{-\frac{1}{5}} \times 6^{\frac{3}{5}}}{\sqrt[5]{36}} =$

a) 1 b) 6 c) $\frac{1}{6}$ d) $\sqrt{6}$

12 **Trouvez l'ensemble solution, dans R de chacune des équations suivantes :**

a) $x^{\frac{1}{2}} = 5$ b) $x^{\frac{7}{4}} = \frac{1}{128}$ c) $\sqrt{x^3} = 27$

d) $(x - 5)^{\frac{5}{3}} = 32$ e) $3\,x^{-\frac{3}{4}} = \frac{3}{8}$ f) $2^{3x-1} = \frac{16}{\sqrt{2}}$

13 **En lien avec l'économie :** Sachant que (I) est, l'intérêt bancaire est pour une somme (a) après (n) années est donnée par la relation $I = (\frac{s}{a})^{\frac{1}{n}} - 1$ où S est le total de la somme n années. Ahmed dépose 10000 livres égyptiennes. Après 3 ans la somme est devenue 12597 livres égyptiennes, trouvez le pourcentage annuel de l'intérêt.

14 **Déceler l'erreur :**

a) Si $x^{\frac{2}{3}} = 4$, alors $x = 8$ b) $\sqrt[4]{x^4} = x$

15 **Simplifiez l'expression :** $\frac{\sqrt{a}}{a\sqrt[3]{a}}$

16 **Activité:** Utilisez une calculatrice pour effectuer les opérations suivantes (Arrondir le résultat à un centième près) :

a) $75\,(1{,}21)^{-\frac{19}{2}}$ b) $\frac{\sqrt[5]{2^{-1}} \times \sqrt[3]{7^{-2}}}{\sqrt{4^{-3}}}$

17 **En lien avec la commerce :** Mohamed a commencé avec 75 lapins pour fonder un projet d'élevage des lapins. Si le taux de prolifération des lapins est donné par la relation : $N = 75(4{,}22)^n$

Où n est le nombre de mois. Trouvez le nombre prévue des lapins après 5 mois

18 **En lien avec les volumes :** Si la longueur (ℓ) de l'arête d'un cube est donnée par la relation $\ell = \sqrt[3]{V}$ où v est le volume du cube en unités cubiques, trouvez la longueur de l'arête d'un cube de 1331 unités cubiques

Réflexion critique :

19 **En lien avec les volumes :** Si le rayon d'une sphère est donné en fonction de son volume par la relation $r = \sqrt[3]{\frac{3v}{4\pi}}$, Trouvez :

a) le rayon d'un sphère de 27000 cm^3 de volume.

b) la valeur de l'augmentation de son volume lorsque son rayon augmente au double.

Unité 2

2 - 2 Fonction exponentielle et application



Allez apprendre

- Fonction exponentielle.
- Représentation graphique d'une fonction exponentielle.
- Propriétés d'une fonction exponentielle



Vocabulaires de base

- Fonction exponentielle
- Croissance exponentielle
- Décroissance exponentielle



Aides pédagogiques

- Calculatrice scientifique
- Logiciels de graphisme



La fonction $f(x) = a^x$, lors que $a > 1$ est appelées la fonction de croissance exponentielle. Elle a des applications multiples comme la croissance démographique et l'entérêt composé deux traitement bancaire.

La fonction $f(x) = a^x$ lorsque $0 < a < 1$ est appelée la fonction de décroissance exponentielle. Elle a des applications multiples comme l'intervalle de demi-âge de radiation des atômes.



Découvrir

Dans beaucoup de situations de notre vie quotidienne, on un fort besoin de exécuter des calculs précieux comme les intérêts bancaires, l'explosion démographique, l'accroissement des cellules dans certaines êtres et les intervalles de mi-âge pour les atomes de radiation .



Remarque

La fonction algébrique :
La variable indépendante est la base x tandis que la puissance est un nombre réelle.

La fonction exponentielle :
La variable indépendante x est la puissance tandis que la base est un nombre réelle positif différent de 1.



A apprendre

Fonction exponentielle



définition 1

Si est un nombre réelle positif $\neq 1$ alors

Fonction f où $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$, $f(x) = a^x$

est appelée **fonction exponentielle**

Expression orale : Expliquez pourquoi la fonction définie par $f(x) = (-3)^x$ n'est pas une fonction exponentielle

Représentation graphique d'une fonction exponentielle

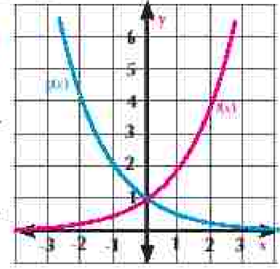


Exemple

1. Représentez graphiquement, dans le même quadrillage les deux fonctions: $f(x) = 2^x$, $g(x) = (\frac{1}{2})^x$ sur un intervalle arbitraire [-3 ; 3]

Solution

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$g(x)$	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$



Du graphique on peut déduire les propriétés suivantes

1. La fonction est $f(x) = 2^x$ est croissante sur son ensemble définition car $(a > 1)$
   La fonction est $g(x) = (\frac{1}{2})^x$ est décroissante sur son ensemble définition car $(0 < a < 1)$
2. L'ensemble de définition de chacune de deux fonctions est R^+
3. La courbe de $f: f(x) = 2^x$ est le symétrique de la courbe de $g: g(x) = (\frac{1}{2})^x$ par rapport à l'axe des ordonnées.

Essayez de résoudre

1. Représentez graphiquement, dans le même quadrillage les fonctions : $f_1(x) = 2^x$, $f_2(x) = 3^x$ et $f_3(x) = 4^x$ sur un intervalle arbitraire [-2 ; 2]

Exemple

2. Si $f(x) = 3^x$ complétez ce qui suit :

a) $f(2) =$ .... b) $f(x+2) =$ .... $\times 3^x$ c) $f(x) \times f(-x) =$ ....

Solution

a) $f(2) = 3^2 = 9$ b) $f(x+2) = 3^{x+2} = 3^x \times 3^2 = 9 \times 3^x$

c) $f(x) \times f(-x) = 3^x \times 3^{-x} = 3^{x-x} = 3^{zero} = 1$

Applications la fonction exponrntielle:

I Croissance exponentielle

Nous pouvons utiliser la fonction f telle que $f(n) = a\,(1 + p)^n$ pour représenter la croissance exponentielle d'un pourcentage annuel fixe p durant des périodes équivalentes dont nombre est n. Discutez avec votre professeur pour déduire la relation précédente:

Intérêt composé : Pour calculer le total T d'un montant investit m dans un banque pour un intérêt annuel I (un pourcentage) pour un nombre n d'années, les intérêts peuvent être composés sur x fractions (des intervalles) d'une année, on utilise la relation suivante : $T = m\,(1 + \frac{I}{x})^{nx}$.



Exemple

3. Un homme a déposé un montant de 5000 livres égyptiennes dans une banque pour un intérêt composé annuel de 8 % . Trouvez la somme totale après 10 ans dans chacun des cas suivants:

a) Intérêts annuels. b) Intérêts trimestriels. c) Intérêt mensuels.

Solution

En utilisant la relation suivante : $T = m\,(1 + \frac{I}{n})^{nx}$ où x sont les fractions annuelles

a) Intérêts annuels $\therefore x = 1$

$$T = 5000\,(1 + 0.08)^{10} = 10794.62$$

b) Intérêts trimestriels $\therefore x = 4$

$$T = 5000\,(1 + \frac{0.08}{4})^{10 \times 4} = 11040.2 \text{ L.E}$$

c) Intérêts mensuels $\therefore x = 12$

$$T = 5000\,(1 + \frac{0.08}{12})^{10 \times 12} = 11098.2 \text{ L.E}$$

Essayez de résoudre

(2) Un homme a déposé un montant de 10000 livres égyptiennes dans une banque pour un intérêt composé annuel de 5 %. Trouvez la somme totale après 8 ans dans chacun des cas suivants :

a) Intérêts annuels. b) Intérêts trimestriels. c) Intérêts mensuels.

II Décroissance exponentielle

Nous pouvons utiliser la fonction f telle que $f(n) = a\,(1 - p)^n$ pour représenter la décroissance exponentielle d'un pourcentage annuel fixe durant des périodes équivalentes où n est le temps écoulé pendant une période, a est la valeur initiale et p est le pourcentage de croissance dans cette période du temps.



Exemple

(4) La production maximale d'une mine d'or s'est élevée à 1850 kg. Cette production diminue à un taux annuel de 9 %.

a) écrire une fonction exponentielle représentant la production après n ans .

b) estimer à une Kg près, la production de la mine 8 ans après.

Solution

$a = 1850$, $p = 0{,}09$

a) La fonction de décroissance exponentielle est f telle que : $f(t) = a(1 - p)^n$

$f(n) = 1850\,(1 - 0{,}09)^n$

b) Après 8 ans, (remplaçant n par 6)

$\therefore\ f(8) = 1850\,(1 - 0{,}09)^8 \simeq 870$ kg

Essayez de résoudre

(3) Le prix du marché d'une décroît (à cause de l'utilisation) suivant la relation $x = 150000\,(0{,}94)^n$ où x est le prix en L.E. de la voiture et n est le temps découlé du moment d'achat. Trouvez :

a) le prix d'une nouvelle voiture.

b) le prix de la voiture 3 ans après l'année d'achat.

 **Exercices 2 - 2** 

1) Tracez la courbe représentative de chacune des fonctions ci-après puis trouvez l'ensemble de définition et l'ensemble image ensuite indiquez laquelle est une fonction croissante et laquelle ce qui est décroissante :

a) $f(x) = 2^x$ b) $f(x) = 3^x$ c) $f(x) = (\frac{1}{2})^x$ d) $f(x) = 2^{-x+1}$

2) **Complétez ce qui suit :**

a) La courbe de la fonction f telle que $f(x) = 2^x$ coupe l'axe des ordonnées au point des coordonnées ....

b) La courbe de la fonction f telle que $f(x) = 2^{1-x}$ coupe l'axe des ordonnées au point des coordonnées ....

c) Si la courbe de la fonction f telle que $f(x) = a^x$ passe par le point des coordonnées (1 ; 3), alors a = ...

d) La courbe de la fonction f telle que $f(x) = 3^x$ est l'image de la courbe de la fonction g telle que $g(x) = (\frac{1}{3})^x$ dans la symétrie par rapport à ....

e) La fonction f telle que $f(x) = a^x$ est décroissante si $a \in$ ....

f) La fonction f telle que $f(x) = (2a)^x$ est croissante si $a \in$ ....

3) **En lien avec la population :** Si le recensement de la population dans un pays à la fin de l'année 2000 est 43265341 d'habitants avec un taux d'augmentation annuelle de 1,5 % :

a) Écrivez une fonction exponentielle représentant le développement futur après n années de l'an 2000.

b) Utilisez cette fonction pour estimer le nombre prévu d'habitants dans ce pays en 2020 si le taux d'augmentation moyenne reste le même.

4) **En lien avec l'investissement :** Un homme investit un million livres égyptiennes pour fonder un projet. Cette somme croit suivant une fonction exponentielle avec un taux d'augmentation annuelle de 6 % . Déterminez :

a) une formule représentant la croissance de cette somme après n ans.

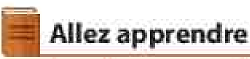
b) estimez la somme investi 10 ans après.

5) Trouvez le somme totale d'un montant déposé dans banque avec un taux d'intérêt composé annuelle de 5 % au terme de 7 ans.

6) **En lien avec l'élevage du poisson :** Si le nombre de poissons de Saumon dans un lac croit suivant la fonction de croissance exponentielle f telle que $f(t) = 200(1,03)^t$ où t en semaines. Déterminez le nombre de Saumons dans ce lac après 8 semaines.

7) Soit $f(x) = 5^{x+1}$. Démontrez que $\dfrac{f(x) \times f(x-1)}{f(x-2) \times f(x+1)} = 1$

2 - 3 Equations exponentielles



Allez apprendre

- Fonction exponentille.
- Representation graphique.
- Proprétes des fonction exponentille.



Vocabulaires de base

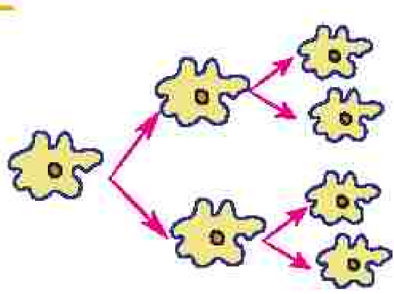
- Equation exponentielle
- Résolution graphique

Aides pédagogiques

- Calculatrice scientifique
- Logiciels de Graphisme



Réfléchissez et discutez



L'amoeba se développe par la méthode de division binaire, c'est-à-dire une cellule se divise en deux cellules dans une période du temps déterminée puis chacune de nouvelles cellules se divisent de nouveau en deux cellules et ainsi de suite dans des périodes équivalentes et dans les mêmes conditions ....

1 Trouvez le nombre de cellules produites d'une seule cellule après 9 périodes du temps.

2 Trouvez le nombre de périodes, nécessaires pour produire 8192 cellules de cette cellule.



A apprendre

Equation exponentielle

Si une équation contient la variable en position d'exposant, alors c'est une équation exponentielle comme par exemple, l'équation ($3^{x+1} = 8$)

Résolution des équations exponentielles:

[I] Si $a^m = a^n$ où $a \notin \{0; 1; -1\}$ **alors** $m = n$.



Exemple

(1) Trouvez dans R l'ensemble solution de chacune des équations suivantes:

a $2^{x+3} = 8$ **b** $3^{x-2} = (\frac{1}{27})^x$



Solution

a $\because 2^{x+3} = 8$ $\therefore 2^{x+3} = 2^3$

$\therefore x + 3 = 3$ d'où $x = 0$

$\therefore$ Ensemble de solutions = $\{0\}$

b $\because 3^{x-2} = (\frac{1}{27})^x$ $\therefore 3^{x-2} = 3^{-3x}$

$\therefore x - 2 = -3x$ $\therefore x + 3x = 2$

$\therefore 4x = 2$ d'où $x = \frac{1}{2}$

$\therefore$ Ensemble de solutions = $\{\frac{1}{2}\}$

Essayez de résoudre

1) Trouvez dans $\mathbb{R}$ l'ensemble solution de chacune des équations suivantes :

a) $5^{x+1} = 25$ b) $2^{1-x^2} = \frac{1}{8}$

[II] **Si** $a^m = b^m$ où $a \notin \{0; 1; -1\}$, et $b \notin \{0; 1; -1\}$ alors
soit $m = 0$
ou $a = b$ si m est impair.
ou $a = |b|$ si m est pair .

Exemple

2) Trouvez dans $\mathbb{R}$ l'ensemble solution de chacune des équations suivantes :

a) $3^{x+2} = 7^{x+2}$ b) $4^{x-2} = 3^{2x-4}$

Solution

a) $\because\ 3^{x+2} = 7^{x+2}$
$\therefore\ x + 2 = 0$ d'où $x = -2$
$\therefore$ L'ensemble solution est $= \{-2\}$

b) $\because\ 4x^{-2} = 3^{2x-4}$ $\therefore\ 4^{x-2} = 3^{2(x-2)}$
$\therefore\ 4x^{-2} = 9^{x-2}$
$\therefore\ x - 2 = 0$ d'où $x = 2$
$\therefore$ L'ensemble solution est $= \{2\}$

Essayez de résoudre

2) Trouvez dans $\mathbb{R}$ l'ensemble solution de chacune des équations suivantes :

a) $5^{x-1} = 4^{x-1}$ b) $2^{2x-6} = 7^{x-3}$

Exemple

3) Soit $f(x) = 25^{x+1}$ .Trouvez la valeur de x qui vérifie $f(x) = 32$

Solution

$\because\ f(x) = 32$ $\therefore\ 25^{x+1} = 32$
$\therefore\ 25^{x+1} = 2^5$ $\therefore\ x + 1 = 5$
$\therefore\ x = 4$ $\therefore$ Ensemble des solutions $= \{4\}$

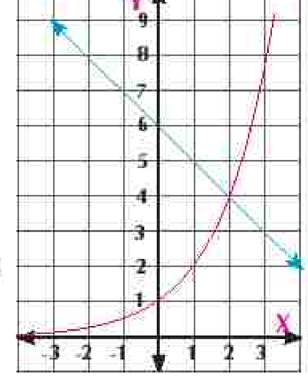
Essayez de résoudre

3) Si $f(x) = 7^x$, trouvez la valeur de x qui vérifie $f(x+1) = 49$

Résolution des équations exponentielles graphiquement :

Exemple

(4) Tracez dans un même graphique, les deux fonctions $f_1 = f_1(x) = 2x$, et $f_2(x) = 6 - x$. Du graphique, trouvez l'ensemble solution de l'équation $2^x = 6 - x$



Solution

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
2^x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$6 - x$	9	8	7	6	5	4	3

Du graphique, l'abscisse des coordonnées du point d'intersection des deux courbes est 2 $\therefore$ L'ensemble solution $= \{2\}$

Essayez de résoudre

(4) En utilisant un logiciel de graphisme (geogebra), tracez dans un même graphique, les deux fonctions $f_1(x) = 2^{x+1}$ et $f_2(x) = 3$. Du graphique, Trouvez l'ensemble solution de l'équation $2^{x+1} = 3$.

Exemple

(5) L'un des êtres fines se développe par la méthode de division binaire, où le nombre de ces êtres se multiplie car une cellule se divise en deux cellules dans une heure. Si au début de l'observation le nombre de cellules était 20 milles, trouvez :

a) Le nombre de cellules produites d'une seule cellule après 5 heures.

b) Combien faut-il d'heures pour produire 2 millions et 560 cellules ?

Solution

On écrire le nombre de cellules sous une forme d'une fonction exponentielle.

$f(t) = b(a)^t$

$= 20000\,(2)^t$ où t est nombre d'heures

a) le nombre de cellules produites d'une seule cellule après 5 heures (on pose $t = 5$)

$= 20000 \times 2^5 = 640000$ cellules

b) Le nombre d'heures nécessaires pour produire 2 millions et 560 cellules

$\therefore\ 20000\,(2)^t = 2260000$ En divisant par 20000

$\therefore\ (2)^t = 128$

$\therefore\ 2^t = 2^7$ d'où t $t = 7$ heures.

Essayez de résoudre

(5) Répondez aux questions de la rubrique Réfléchissez et discutez page (66)

 **Exercices 2 - 3** 

1 Complétez ce qui suit :

a) Si $5^{x-2} = 1$ alors x = ……………

b) Si $3^{x-2} = 7^{x-2}$ alors x = ……………

c) Si $2^{x+1} = 5^{x+1}$ alors 3^{x+1} = ……………

d) Si $2^{|x|} = 32$ alors x = ……………

e) Si les deux courbes représentatives des fonctions $f_1(x) = 3^x$ et $f_2(x) = 4 - x$ se coupent au point de coordonnées (k ; 3) , alors l'ensemble solution de l'équation $3^x = 4 - x$ est égale à

Choisissez la bonne réponse

2 Si $3^{x-5} = 9$ alors x = ……………

a) 2 b) 7 c) -3 d) -7

3 Si $2^x = 20$ où $n < x < n + 1$ et n est un nombre entier, alors n = ……………

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4

4 Si $3^x = 9$ alors 3^{x+1} = ……………

a) 5 b) 15 c) 27 d) 45

5 Le nombre $5^{x+1} + 5^x$ est divisible par …………… pour tout x entier naturel .

a) 7 b) 6 c) 13 d) 17

6 Si $(\frac{2}{3})^{x-2} = \frac{8}{27}$ alors x = ……………

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5

7 Les deux courbes représentatives des fonctions $f(x) = 2^x$ et $g(x) = 3^x$ se coupent en x = ……

a) -1 b) 0 c) 1 d) 2

8 Trouvez l'ensemble solution de chacune des équations suivantes :

a) $3^{x+4} = 9$ b) $2^{x-5} = \frac{1}{32}$

c) $5^{x+2} = 1$ d) $3^{|x|} = 3$

e) $2 \times 3^{x-2} = 54$ f) $7x^{-5} = 3x^{-5}$

(g) $2^{3x-6} = 5^{x-2}$ (h) $(\frac{3}{2})^{x-2} = \frac{8}{27}$

(i) $2^{x} \times 5^{-x} = \frac{4}{25}$ (j) $4^{x} = 64$

(k) $4^{1-x} = \frac{1}{4}$ (l) $(3)^{x-5} = \frac{1}{9}$

(9) **Trouvez, graphiquement l'ensemble solution de chacune des équations suivantes :**

(a) $3^{x} = 3$ (b) $2^{x+1} = 5$ donnez une valeur approchée à un décimal près

(c) $3^{x+1} = -x$ (d) $2^{x} = \frac{1}{2}x + 1$

(10) Soit $f(x) = 2^{x}$, Trouvez l'ensemble solution de chacune des équations suivantes :

(a) $f(x) = 8$ (b) $f(x+1) = \frac{1}{32}$

(11) Soit $f(x) = 3^{x+1}$, Trouvez l'ensemble solution de chacune des équations suivantes:

(a) $f(x) = 27$ (b) $f(x - 1) = \frac{1}{9}$

(12) Soit $f(x) = 7^{x-2}$, Trouvez l'ensemble solution de chacune des équations suivantes:

(a) $f(x) = 343$ (b) $f(2x) = \frac{1}{49}$

(13) **Décelez l'erreur :** Mohamed et Karim ont résolu l'équation $2 \times 2^{x} = 16$

Solution de Mohamed

$2 \times 2^{x} = 16$

$\therefore 4^{x} = 16$

$\therefore 4^{x} = 4^{2}$

$\therefore x = 2$

Solution de Karim

$2 \times 2^{x} = 16$

$\therefore 2^{x} = \frac{16}{2} = 8$

$\therefore 2^{x} = 2^{3}$

$\therefore x = 3$

Laquelle de deux solutions est vraies ?

(14) Le nombre des êtres maritimes se décroit suivant l'équation de décroissance exponentielle $y = 8192\,(\frac{1}{2})^{n-1}$ où n en semaines, trouvez :

(a) Le nombre de ces êtres après 4 semaines.

(b) Combien faut-il de semaines pour que le nombre des êtres soit égale à 256 .

Unité 2

Fonction logarithme et sa représentation graphique

2 - 4



Réfléchissez et découvrez

Observez les équations exponentielles suivantes et essayez de répondre:

Si $2^x = 2$, $2^y = 4$, $2^z = 3$ alors :

1- $x =$ .... , $y =$ ....

2- La valeur de z est comprise entre deux nombres entiers consécutifs sont .... , ...

Remarquez que: On ne peut pas calculer la valeur de y directement comme celles de x et z, pour cela on a besoin d'une nouvelle notion pour calculer la valeur de y.



A apprendre

Fonction logarithme

Soient x et a deux nombres réelles positifs et a ≠ 1. La fonction logarithme $y = \log_a x$ est la fonction réciproque de la fonction $y = a^x$

Exemple : Si $\log_2 32 = 5$ alors $2^5 = 32$ et réciproquement.

Expression orale:

Si le point de coordonnées, (c ; d) ∈ à la courbe de la fonction exponentielle $y = a^x$, alors :

1- Le point de coordonnées (;) ∈ à la courbe de la fonction $y = \log_a x$.

2- La forme exponentielle $a^y = x$ où $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ est équivalente à la forme logarithmique.........



Exemple

Transformation de la forme exponentielle en forme logarithmique

① Transformez ce qui suit en forme logarithmique :

ⓐ $3^4 = 81$ ⓑ $25^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{5}$ ⓒ $10^{-2} = 0.01$



Solution

ⓐ $\log_3 81 = 4$ ⓑ $\log_{25} \frac{1}{5} = -\frac{1}{2}$ ⓒ $\log_{10} 0.01 = -2$

Expression orale : Peut-on transformer $(-2)^4 = 16$ dans la forme logarithmique ? Pourquoi ?.



Allez apprendre

- Définition d'une fonction logarithme.
- Représentation graphique d'une fonction logarithme.
- Transformation de la forme exponentielle en forme logarithmique et inversement.
- Résolution de quelques équations logarithmiques simples.



Vocabulaires de base

- Logarithme
- Fonction réciproque
- Ensemble de définition
- Logarithme décimal



Aides pédagogiques

- Calculatrice scientifique
- Logiciels de graphisme

conseils

$\log_a x = y$ est appelér la forme logarithmique

la forme $a^y = x$ est appelée la forme exponentielle équivalente.

Remarquez que la base (a) est positive

Si $(-3)^4 = 81$ il n'ya pas de forme exponentielle équivalente.

Essayez de résoudre

1. Exprimez chacun de ce qui suit en forme logarithmique :

a) $10^3 = 1000$ b) $8^{\frac{1}{3}} = 2$ c) $b^x = y$ où $b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$

Logarithme décimal

Si la base du logarithme est 10, le logarithme est appelé dans ce cas logarithme décimal.

On le note sans base.

Par exemple : $\log_{10} 7$; s'écrit log 7 et $\log_{10} 127$; s'écrit log 127, On peut utiliser la touche log dans la calculatrice pour calculer le logarithme normal d'un nombre

Exemple

2. Transformez chacune des expressions suivantes en forme exponentielle :

a) $\log_2 32 = 5$ b) $\log 1000 = 3$ c) $\log_2 1 = 0$

Solution

a) $2^5 = 32$ b) $10^3 = 1000$ c) $2^0 = 1$

Essayez de résoudre

2. Transformez les expressions suivantes en forme exponentielle :

a) $\log_{125} 25 = \frac{2}{3}$ b) $\log 100 = 2$ c) $\log_5 5 = 1$

Exemple Trouvé la valeur d'une expression logarithmique

3. Trouvez la valeur de chacune des expressions suivantes :

a) $\log_5 125$ b) $\log 0{,}01$

Solution

a) En posant $\log_5 125 = x$ En mettant sous la forme exponentielle

$\therefore 5^x = 125$ $\therefore 5^x = 5^3$ d'où $x = 3$

$\therefore \log_5 125 = 3$

b) En posant $\log 0.01 = y$ (logarithme décimal de base 10) En mettant sous la forme exponentielle

$\therefore 10^y = 0{,}01$ $\therefore 10^y = 10^{-2}$

Donc $y = -2$ $\therefore \log 0.01 = -2$

Essayez de résoudre

(3) Trouvez la valeur de chacune des expressions suivantes :

a $\log_3 81$ b $\log_{\frac{1}{2}} 32$

Exemple **Résolution des équations**

(4) Trouvez dans $\mathbb{R}$ l'ensemble solution de chacune des équations suivantes :

a $\log_2 (x+5) = 3$ b $\log_5 625 = x - 1$ c $\log_x (x+6) = 2$

Solution

a L'équation est définie pour toutes les valeurs de x qui vérifient $x+5 > 0$;

d'où $x > -5$ (Ensemble de validité de l'équation)

En mettant l'équation sous la forme exponentielle équivalente

$\therefore\ x+5 = 2^3$ $\therefore\ x+5 = 8$ d'où $x = 3$

$\therefore\ 3 \in$ Ensemble de validité de l'équation

$\therefore$ L'ensemble solution est $= \{3\}$

b L'équation est définie pour toutes les valeurs réelles de x. En mettant l'équation sous la forme exponentielle équivalente .

$\therefore\ 5^{x-1} = 625$ $\therefore\ 5^{x-1} = 5^4$

$\therefore\ x - 1 = 4$ d'où $x = 5$

$\therefore$ L'ensemble solution est $= \{5\}$

c L'équation est définie pour toutes les valeurs de qui vérifient $f(x)$ $\begin{cases} x+6 > 0 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$

c'est-à-dire Ensemble de validité de l'équation est $]0\,,+\infty[- \{1\}$

En mettant l'équation sous la forme exponentielle équivalente :

$x^2 = x+6$

$x^2 - x - 6 = 0$

$(x-3)(x+2) = 0$

soit $x = 3$ ou $x = -2$

$x = -2 \notin$ Ensemble de validité de l'équation

$\therefore$ L'ensemble solution est $= \{3\}$

Essayez de résoudre

(4) Trouvez dans R l'ensemble solution de chacune des équations suivantes :

a $\log_5(3x-1) = 1$ b $\log_3 27 = x + 2$ c $\log_{(x-1)} 9 = 2$

Représentation graphique de la fonction logarithme

Si $f(x) = a^x$ où $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ alors la fonction réciproque de la fonction f est appelée la fonction logarithmique c'est-à-dire que $y = \log_a x$

Relation entre la fonction exponentielle et la fonction logarithmique

La figure ci-contre représente les courbes de la fonction exponentielle $f(x) = a^x$ et celle de la fonction logarithme $y = \log_a x$.

Étudiez les propriétés de chacune de deux fonctions : ensemble de définition, ensemble image et la symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$.



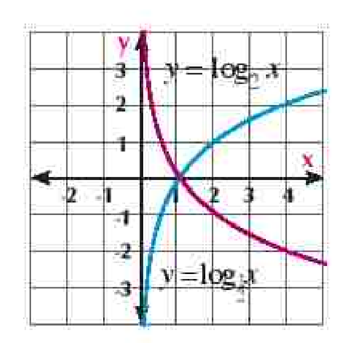
Exemple

(5) Représentez, graphiquement les fonctions $y = \log_2 x$ et $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ dans un même quadrillage



On choisit les valeurs de x les puissances de 2(la base)

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$\log_2 x$	-2	-1	0	1	2
$\log_{\frac{1}{2}} x$	2	1	0	-1	-2



Du graphique, on déduit les propriétés de la fonction logarithme

Ensemble de définition : $\mathbb{R}^+$, Ensemble image : $\mathbb{R}$

La fonction $y = \log_a x$ est: croissante lorsque pour tout $x > 1$,

décroissante lorsque pour tout $0 < x < 1$

Essayez de résoudre

(5) Représentez, graphiquement la fonction $y = \log_3 x$ Du graphique : trouvez son ensemble image et étudiez le sens de variation de la fonction.



Exemple

(6) **Applications de la vie courante :** Dans un pays le système fiscal suit la fonction suivante

$$f(x) = \begin{cases} 10\% \, x & \text{si } x \leqslant 5000 \\ 10\% \, x + 100 \log (x - 4999) & \text{si } x > 5000 \end{cases}$$

Où x est le bénéfice net annuellement. Trouvez :

(a) L'impôt accueille d'un citoyen qui a le bénéfice annuelle s'élève à 3600.

(b) L'impôt accueille d'un citoyen qui a le bénéfice annuelle s'élève à 8000.

Solution

a) $f(3600) = 10\% \times 3600 = 0.1 \times 3600 = 360$ L.E

b) $f(8000) = 10\% \times 8000 + 100 \log (8000 - 4999) = 1147.7$ L.E

Essayez de résoudre

6) Si a est la somme annuelle dépensée par une société pour la publicité et y est le revenu de la société au cours de l'année actuelle où $y = 10^4 [1 + 2 \log (\frac{a}{100} + 1)]$ Calculez y si a = 1100 livres égyptiennes.



Exercices 2 - 4

1) **Completez ce qui suit :**

a) La forme exponentielle à $\log_3 27 = 3$ est ....

b) La forme lograithmique équivalente à $3^0 = 1$ est ....

c) $\log 0.001 =$ ....

d) $\log_2 1 =$ ....

e) Si $\log_x 4 = 2$ alors $x =$ ....

f) Si $\log_2 128 = x + 1$ alors $x =$ ....

g) L'ensemble de définition $f(x) = \log_2 x$ est ....

h) la fonction f où $f(x) = \log_a x$ est décroissant pour tout a ∈ ....

i) La courbe de la fonction f où $f(x) = \log_2 x$ passe le point (8, ...)

j) Si $\log 3 = x$, $\log 5 = y$ alors $\log 15 =$ .... (en fonction de x et y)

2) Trouvez dans R l'ensemble solution de chacune des équations suivantes :-

a) $\log_3(x - 1) = 2$

b) $\log_5(x + 2) = 3$

c) $\log_x 9 = \frac{2}{3}$

d) $\log_{x+1} 8 = \frac{3}{4}$

e) $\log_x (x + 2) = 2$

f) $\log_x 9 = 2$

3) Sans utiliser une calculatrice, trouvez la valeur de chacun de ce qui suit :

a) $\log_5 1$

b) $\log_7 7$

c) $\log_3 9$

d) $\log_6 3 + \log_6 2$

4) Dans chacun des cas suivants : représentez, graphiquement la fonction f. Du graphique : trouvez son ensemble image et étudiez le sens de variation de la fonction

a) $f(x) = \log_2 x$

b) $f(x) = \log_3 x$

c) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

d) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} (x + 1)$

5) Utilisez une calculatrice pour trouver la valeur de chacun de ce qui suit :-

a) $\log 15$

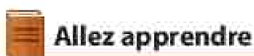
b) $\log_2 27$

c) $4\log 7 - 5\log 13$

6) Si le tarif annuelle d'un abonnement d'une fammille dans club social suit la relation : $f(x) = 500 + 100 \log_n x$ où n est le nombre d'années de l'abonnement, x le nombre des idividus de la fammille. Calculez la valeur de l'abonnement d'une fammille qui se compose de 5 personnes pour la qutrième année dans le club.

Unité 2

2 - 5 Quelques propriétés des logarithmes



- Utilizé quelques propriétes des logarithmes.
- Résolution de l'équation logarithme.
- Utilisé, la calculatrice pour résoudre des équations exponentielles.
- Applications quotédiennes sur les logrithmes.

Vocabulaires de base

- Equation logarithmique



- Calculatrice sientifique
- Logiciels de graphisme

Vous avez appris dans la leçon précédente la notion du logarithme et la représentation graphique de la fonction logarithmique. Dans ce qui suit, nous allons étudier quelques propriétés des logarithmes qui peuvent aider à simplifier les expressions logarithmiques et la résolution des équations comportant des logarithmes.



A apprendre

Quelques propriétés des logarithmes

Si $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$, $x \in \mathbb{R}^+$ et $y \in \mathbb{R}^+$, alors

1- $\log_a a = 1$

Par exemple $\log_3 3 = 1$, $\log 10 = 1$

2- $\log_a 1 = 0$

Par exemple $\log_5 1 = 0$, $\log 1 = 0$

Essayez de démontrer les propriétés **1** et **2** en utilisant la définition du logarithme

3- Propriété du logarithme d'un produit :

$\log_a x\,y = \log_a x + \log_a y$ où $x \in \mathbb{R}^+$, $y \in \mathbb{R}^+$

Pour démontrer cette propriété :

On pose $b = \log_a x$, $c = \log_a y$

D'après la définition du logarithme :

On $x = a^b$, $y = a^c$

d'où $x\,y = a^b \times a^c$ **c'est-à-dire** $x\,y = a^{b+c}$

En transformant le résultat sous la forme logarithmique :

$\log_a x\,y = b + c$

En substituant les valeurs de b et c , on obtient $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$



(1) Sans utiliser la calculatrice, trouvez la valeur de $\log_{34} 2 + \log_{34} 17$

Solution

L'expression $= \log_{34}(2 \times 17)$ **propriété (3)**

$= \log_{34} 34$

$= 1$ **propriété (1)**

Essayez de résoudre

1) Soit $\log_2 7 \simeq 2.8$, $\log_2 13 \simeq 3.7$ Trouvez la valeur de $\log_2 91$ sans utiliser la calculatrice

4- Propriété du logarithme d'un quotient :

$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ (Essayer de démontrer cette propriété)

Exemple

2) Sans utiliser la calculatrice, trouvez la valeur de log 50 - log 5

Solution

L'expression $= \log \frac{50}{5}$ **propriété (4)**

$= \log 10 = 1$ **propriété (1)**

Essayez de résoudre

2) Sans utiliser la calculatrice, trouvez la valeur de $\log_2 7 - \log_2 35$

5- Propriété du logarithme de la puissance :

$\log_a x^n = n \log_a x$ où $x > 0$ (Essayez de démontrer cette propriété)

Exemple

3) Sans utiliser la calculatrice, trouvez la valeur de $\log_5 125$

Solution

L'expression $= \log_5 {}^3 5$

$= 3 \log_5 5$ **propriété (5)**

$= 3 \times 1 = 3$ **propriété (1)**

Remarquez que : $\log_a(\frac{1}{x}) = -\log_a x$ où $x \in \mathbb{R}^+$

Essayez de résoudre

3) Sans utiliser la calculatrice, trouvez la valeur de $\log_{\sqrt{3}} 27$

4) **Réflexion critique :** Est-ce que l'ensemble de définition de la fonction f telle que $f(x) = \log_a x^2$ est le même que l'ensemble de définition de la fonction f telle que $f(x) = 2 \log_a x$? Vérifiez votre réponse

6 - Propriété du changement de base du logarithme

$\log_y x = \dfrac{\log_a x}{\log_a y}$ **Démonstration de cette propriété**

Posons: $z = \log_y x$

$y^z = x$ **En transformant le résultat sous la forme exponentielle**

$z \log_a y = \log_a x$ **En prenant le logarithme de deux membres**

Donc $z = \dfrac{\log_a x}{\log_a y}$ **c'est-à-dire que:** $\log_y x = \dfrac{\log_a x}{\log_a y}$

Exemple

(4) **Mettez sous la forme la plus simple** $\log_7 16 \times \log_2 49$

Solution

L'expression $= \dfrac{\log 16}{\log 7} \times \dfrac{\log 49}{\log 2}$ **propriété (6)**

$= \dfrac{\log 2^4}{\log 7} \times \dfrac{\log 7^2}{\log 2}$

$= \dfrac{4 \log 2}{\log 7} \times \dfrac{2 \log 7}{\log 2}$ **propriété (5)**

$= 4 \times 2 = 8$

Essayez de résoudre

(5) Changez la base dans l'exemple précédent et résolvez

7 - Propriété de l'inverse

$\log_b a = \dfrac{1}{\log_a b}$ **c'est-à-dire** que $\log_b a$, $\log_a b$, sont inverse l'un à l'autre (Essayez de démontrer cette propriété)

Exemple

(5) Sans utiliser la calculatrice, trouvez la valeur $\dfrac{1}{\log_3 15} + \dfrac{1}{\log_5 15}$

Solution

L'expression $= \log_{15} 3 + \log_{15} 5$ **propriété (7)**

$= \log_{15} (3 \times 5)$ **propriété (3)**

$= \log_{15} 15 = 1$ **propriété (1)**

Essayez de résoudre

6 Sans utiliser la calculatrice, trouvez la valeur $\frac{1}{\log_2 30} + \frac{1}{\log_3 30} + \frac{1}{\log_5 30}$

Simplifié les expressions logarithmiques

Exemple

6 Mettez sous la forme la plus simple $\log 0{,}009 - \log\frac{27}{16} + 3\log\frac{5}{2} - \log\frac{1}{12}$

Solution

L'expression $= \log\frac{9}{1000} - \log\frac{27}{16} + \log(\frac{5}{2})^3 - \log\frac{1}{12}$ **propriété (5)**

$= \log(\frac{9}{1000} \times \frac{27}{16} \times \frac{125}{8} \times \frac{12}{1})$ **propriété (3), (4)**

$= \log 1 = 0$ **propriété (2)**

Essayez de résoudre

7 Mettez sous la forme la plus simple $6\log\sqrt{3} - \log\frac{22}{5}1 - \log\frac{9}{7} - \log\frac{1}{2}$

Résolution des équations logarithmiques

Exemple

7 Trouvez, dans R , l'ensemble des solutions de chacune des équations suivantes

a $\log_2 x + \log_2(x+1) = 1$

b $\log_2 x + \log_4 x = 3$

Solution

a L'équation est valide pour tout $x > 0$, $x + 1 > 0$

C'est-à-dire $x > 0$ **(Ensemble de validité de l'équation)**

$\therefore \log_2 x(x+1) = 1$ **propriété (3)**

$\therefore x(x+1) = 2^1$ **En transformation de la forme logarithmique à la forme exponentielle**

$\therefore x^2 + x - 2 = 0$ $\therefore (x+2)(x-1) = 0$

Soit $x = -2$ ou $x = 1$ puisque $x = -2 \notin$ Ensemble de validité de l'équation

$\therefore$ Ensemble des solutions $= \{1\}$

b L'équation est valide pour tout $x > 0$ **(Ensemble de validité de l'équation)**

$\therefore \log_2 x + \frac{\log_2 x}{\log_2 4} = 3$ **propriété (6)**

$\log_2 x + \frac{\log_2 x}{2} = 3$ **Mutipliant par 2**

$\therefore 2\log_2 x + \log_2 x = 6$ $\therefore 3\log_2 x = 6$ $\therefore \log_2 x = 2$

$\therefore \quad x = 4$ **(En transformation de la forme logarithmique à la forme exponentielle)**

Puisque $x = 4 \in$ Ensemble de validité de l'équation

$\therefore$ Ensemble des solutions = {4}

Essayez de résoudre

8 Trouvez, dans R , l'ensemble des solutions de chacune des équations suivantes :

a) $\log(2x+1) - \log(3x-1) = 1$ b) $\log_2 x = \log_x 2$

Résolution des équations exponentielles en utilisant les logarithmes

Exemple

9 Trouvez, dans R l'ensemble des solutions de chacun des cas suivants en arrondissant le résultat à un centièmes près :

a) $2^x = 7$ b) $3^{x+1} = 5^{x-2}$

Solution

a) $2^x = 7$ **En prenant le logarithme de chaque membre**

$\therefore \log 2^x = \log 7 \qquad \therefore\ x \log 2 = \log 7 \qquad \therefore\ x = \dfrac{\log 7}{\log 2}$

En utilisant la calculatrice comme suit :

[÷] [log] [7] [)] [▼] [log] [2] [)] [=] 2.807354922

$\therefore x \simeq 2.81 \qquad \therefore$ Ensemble des solutions = {2.81}

(Vérification de la solution en utilisant la calculatrice) [2] [$x^■$] [ans] [=] 7

b) $3x^{+1} = 5x^{-2}$ En prenant la logarithme de deux membres

$\therefore\ (x+1)\log 3 = (x-2)\log 5 \qquad \therefore\ x\log 3 + \log 3 = x\log 5 - 2\log 5$

$\therefore\ x\log 3 - x\log 5 = -\log 3 - 2\log 5 \qquad \therefore\ x(\log 3 - \log 5) = -\log 3 - 2\log 5$

$\therefore x = \dfrac{-\log 3 - 2\log 5}{\log 3 - \log 5}$

En utilisant la calculatrice comme suit :

[÷] [−] [log] [3] [)] [−] [2] [log] [5] [)] [▼]

[log] [3] [)] [−] [log] [5] [)] [=] 2.807354922

$\therefore\ x \simeq 8.45 \qquad \therefore$ Ensemble des solutions = {8.45}

(Vérification de la solution en utilisant la calculatrice)

[3] [$x^■$] [ans] [+] [1] [▶] [÷] [5] [$x^■$] [ans] [−] [2] [=] 1

Essayez de résoudre

8) Trouvez à deux décimales près, l'ensemble des solutions de chacun de ce qui suit :

a) $7^x = 2$ b) $4^{x-1} = 3^x$

Activité — Applications mathématiques et de la vie courante

10) **En lien avec l'industrie :** Si la compétence d'une machine décroit annuellement suivant la relation $C = C_0 (0,9)^n$ où C est la compétence de la machine, C_0 est la compétence initiale de la machine et n est le nombre d'années d'utilisation de la machine. Sachant que la machine est démantelée si sa compétence diminue à 40 % de sa compétence initiale, quel le nombre d'années de travaille de la machine avant sa dénasalisation ?.

Solution

La compétence est 40٪ veut dire 40% de la compétence initiale.

$\therefore 0.4\, C_0 = (0.9)^n C_0$ **En divisant par C_0**

$\therefore 0.4 = (0.9)^n$ **En prenant le logarithme de deux membres**

$\therefore \log 0.4 = n \log 0.9$ $\therefore n = \dfrac{\log 0.4}{\log 0.9} = 8{,}696718$

C'est-à-dire que la machine travaille plus que 8 ans avant de sa dénasalisation .

Application sur l'activité

9) Dans l'exemple précédent, trouvez la compétence de la machine après 4 ans de début de son travail



Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées :

1) $\log_2 8 =$

a) 4 b) 3 c) 16 d) 10

2) $\log 2 + \log 5 =$

a) 1 b) log 7 c) log2.5 d) 10

3) $\log_5 \sqrt{5} =$

a) 2 b) 5 c) $\frac{1}{2}$ d) -1

4) Si $\log 3 = x$, $\log 4 = y$ alors $\log 12 =$

a) $x + y$ b) $x\,y$ c) $x - y$ d) $\log x + \log y$

(5) $2\log_6 2 + 2\log_6 3 =$

a) 6 b) 36 c) 2 d) 12

(6) $\log_2 5 \times \log_5 2 =$

a) 1 b) 10 c) $\frac{5}{2}$ d) zero

(7) $\log_5 2 \times \log_3 5 \times \log_2 3 =$

a) 30 b) 1 c) 0 d) log 30

(8) Exprimez chacun de ce qui suit en fonction de $\log x$ ou , $\log(x+1)$

a) $\log x(x+1)$ b) $\log \frac{x}{x+1}$ c) $\log\sqrt{x}\ (x+1)^2$

(9) Mettez dans la forme la plus simple :

a) $\log_6 54 - \log_6 9$ b) $\log_6 2 + \log_6 3$ c) $\log_2 12 + \log_2 \frac{2}{3}$

d) $\log 48 + \log 125 - \log 6$ e) $\frac{1 - \log 2}{\log 125}$ f) $\frac{\log 49 + 3\log 7}{\log 7}$

g) $\log_2 16 + \log_3 \sqrt{3} + \log 0.1$

h) $\frac{1}{2}\log_3 c + \frac{1}{2}\log_3 b + 2\log_3 c - \log_3\sqrt{ab} - \log_3 3c^2$

(10) Trouvez dans R l'ensemble solution de chacune des équations suivantes :

a) $\log_2 x + \log_2(x+2) = 3$ b) $\log x + \log(x-3) = 1$ c) $\log_5 x - \log_2 2 = 2$

d) $\log(x+3) - \log 3 = \log x$ e) $\frac{1}{\log_2 x} + \frac{1}{\log_3 x} = 2$ f) $\log x - \frac{3}{\log x} = 2$

(11) Démontrez que $\log_b a \times \log_c b \times \log_d c \times \log_a d = 1$ puis calculez la valeur de $\log_2 3 \times \log_3 5 \times \log_5 16$

(12) Trouvez la valeur de x dans chacun des cas suivants en arrondissant le résultat à un centième près.

a) $3x = 7$ b) $5^{x-1} = 2$ c) $4 \times 7^{x-2} = 1$ d) $2x^{-3} = 3^{x+1}$

Activité

En lien avec la biologie : Si le volume d'un échantillon de bactérie dans un moment est 3×10^6 et le volume d'un échantillon augmente suivant la fonction exponentielle : $v = 3 \times 10^6(1,15)^t$.
Trouvez le volume de bactérie après 4 heures

Résumé de l'unité

1) Puissances entières

Pour tout $a \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a :

a) $a^n = a \times a \times a \times \quad \times a$ (où le facteur a est répété n fois)

b) $a = 1$ pour tout $a \in \mathbb{R}$ -   c) $a^{-1} = \frac{1}{a}$, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ où $a \neq 0$

Propriétés de puissances entières

Pour tout $m \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et b ! 0 on a :

a) $a^m \times a^n = a^{m+n}$

b) $(ab)^n = a^n\ b^n$

c) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

d) $(\frac{a}{b})^n = \frac{a^m}{b^n}$

e) $(a^m)^n = a^{mn}$

2) Racine nième

L'équation $x^n = a$ où $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}^+$ admet n racines

a) **Si n est pair et a est positif**

L'équation admet deux racines réelles(les autres racines sont des nombres complexes), l'une est positive et l'autre est négative

b) **Si n est pair et a est négatif**

L'équation n'admet pas de racines réelles (les racines sont des nombres complexes).

c) **Si n est impair et $a \in \mathbb{R}$**

L'équation admet une racine réelle unique qui est (les racines sont des nombres complexes)

d) **Si $n \in \mathbb{Z}^+$ et $a = 0$:**

L'équation admet une racine réelle unique qui est égale à zéro. (l'équation admet n des racines répétées et nulles)

3) Propriétés des racines $n^{ième}$: Si $\sqrt[n]{a}$, $\sqrt[n]{b} \in \mathbb{R}$ alors:

a) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}$

b) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $b \neq 0$

c) $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m = a^{\frac{m}{n}}$

d) $\sqrt[n]{a^n} = a$ Si n est impaire $= |a|$ Si n est paire

4) Puissances fractionnaires $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ où $\sqrt[n]{a^m} \in \mathbb{R}$

5) Propriétés des puissances fractionnaires

a) $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ où $a = \mathbb{R} - \{0\}$, $n \in \mathbb{Z}^+ - \{1\}$, $m \in \mathbb{Z}$ et il n'y a pas de facteur commun entre m et n.

b) On peut généraliser les règles des puissances entières sur les puissances fractionnaires.

6 Fonction exponentielle : Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ telle que $f(x) = a^x$ pour tout $a \in \mathbb{R} - \{1\}$ alors la fonction f est appelée une fonction exponentielle de base a

7 Propriétés de la courbe de la fonction exponentielle

a) L'ensemble de définition est $\mathbb{R}$ b) L'ensemble image est $\mathbb{R}$

c) La fonction est croissante sur son ensemble de définition pour tout $a > 1$.
La fonction est de appelée fonction de croissance exponentielle

d) La fonction est croissante sur son ensemble de dé définition pour tout $0 < a < 1$.
La fonction est appelée fonction de croissance exponentielle.

8 Croissance exponentielle : Nous pouvons utiliser la fonction f telle que $f(t) = a\,(1 + p)^t$ pour représenter la croissance exponentielle d'un pourcentage annuel fixe durant des périodes équivalentes où t est le temps écoulé pendant une période, a est la valeur initiale et p est le pourcentage de croissance dans cette période du temps .

9 Décroissance exponentielle : Nous pouvons utiliser la fonction f telle que $f(t) = a\,(1 - p)^t$ pour représenter la décroissance exponentielle d'un pourcentage annuel fixe durant des périodes équivalentes où t est le temps écoulé pendant une période, a est la valeur initiale et p est le pourcentage de croissance dans cette période du temps.

10 Fonction logarithmique

a) Si $a \in R^+ - \{1\}$ la fonction logarithme $y = \log_a x$ est la fonction réciproque de la fonction $y = a^x$

b) $a^b = c$ alors $b = \log_a c$ (Transformation de la forme logarithmique en forme exponentielle).

c) Logarithme décimal: Si la base du logarithme est 10, le logarithme est appelé dans ce cas Logarithme décimal

11 Propriétés de la fonction logarithme

a) Ensemble définition de la fonction logarithme $= \mathbb{R}^+$

b) Ensemble image de la fonction logarithme $= \mathbb{R}$

c) La forme $\log a\, x$ est équivalente à la forme $a^y = x$

12 Propriétés de la logarithmes : Si $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$

a) $\log_a a = 1$ b) $\log_a a = 0$ c) $\log_a x^m = m \log_a x$ **où** $x > 0$

d) $\log_a x + \log_a y = \log_a x\,y$ où $x, y > 0$

e) $\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$ où $x, y > 0$

f) $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$ où $x > 0$, $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$, $b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$

g) $\log_a x \times \log_x a = 1$



1 Complétez ce qui suit :

a) Si $x^4 = 16$ alors $x =$ ....

b) $4^{\frac{1}{2}} =$ ....

c) Si la courbe d'équation $y = a^x$ passe par le point de coordonnées (-4 ; 16), alors a = ...

d) log 1000 = ...

e) La fonction définie par $f(x) = a^x$ est décroissante quelque soit x et a ∈ ....

f) La courbe de la fonction définie par $f(x) = 2^x$ est l'image de celle de la fonction ....
dans la symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$

g) La courbe de la fonction définie par $f(x) = 3^x$ est l'image de celle de la fonction ....
dans la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.

h) Si $5^{x-2} = 3^{x-2}$ alors $7^{x-2} =$ ....

i) La courbe de la fonction définie par $f(x) = 3^x$ coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées ....

j) Si $\log_2 x = 3$ alors $\log_8 x =$ ....

k) $\log_2 3 \times \log_5 2 \times \log_3 5 =$ ....

l) $\dfrac{1}{\log_2 14} + \dfrac{1}{\log_7 14}$

2 Mettez dans la forme la plus simple :

a) $27^{\frac{1}{3}}$

b) $(\sqrt[3]{10^2})^{-\frac{3}{2}}$

c) $\log_2 \dfrac{3}{2} + \log_2 \dfrac{8}{3}$

d) $\dfrac{\sqrt{8} \times \sqrt[3]{4}}{\sqrt[6]{2}}$

e) $\log_3 5 \times \log_5 3$

f) $\log_2 40 - \log_2 5$

3 Trouvez dans R l'ensemble solution de chacune des équations suivantes :

a) $x^{\frac{2}{3}} = 9$

b) $3^{x-2} = \dfrac{1}{81}$

c) $\log_x (x + 6) = 2$

d) $\log_5 \dfrac{1}{x} = -2$

e) $\log_2 (x - 1) - \log_2 (x - 2) = 2$

f) $3^{x+1} = 4$

4) Trouvez la valeur de $\frac{7^{285} \times 4^{200}}{8^{400}}$ en arrondissant le résultat à un dixième près .

5) Représentez graphiquement chacune des fonctions définies ci-après :

a $f(x) = 2x^{-1}$ b $g(x) = (\frac{1}{3})x$ c $h(x) = \log_2 x$ d $i(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x - 1)$

En lien avec l'économie :

6) Le prix d'un article augmente annuellement dans le taux 9%. Si le prix actuel de l'article est 1000 L.E.

a Ecrivez une formule exprimant le prix de l'article après n année.

b Après combien d'année son prix devient le double du prix actuel.

7) Dans un pays, le nombre d'une espèce des animaux suit une décroissance exponentielle. Si le nombre de cet espèce des animaux était 80540 en1960 et il a diminué à 53879 dans l'année 2000

a Ecrivez une formule exprimant le nombre des animaux après n année de l'an 1960.

b Trouvez le nombre de cet espèce des animaux en 1985.

c Si le nombre de cet espèce des animaux a continué à diminué, en quelle année prévoyez-vous que le nombre arrive à sa moitié de l'année actuelle 1960 .

8) Soient $\log 2 = 0{,}301$, $\log 3 = 0{,}477$ trouvez, sans utiliser une calculatrice la valeur .

a $\log 6$ b $\log \frac{3}{2}$ c $\log 5$

9) Trouvez l'ensemble solution de chacune des équations suivantes :

a $2^x = 5$ b $3^{x+1} = 7$ c $(\frac{2}{3})^{x-2} = 9$

d $5^{1-x} = 3$ e $3^{x-2} = 8^{x-1}$ f $2 \times 5^x = 7$

10) Soit $f(x) = 3^x$

a Démontrez que $f(a) \times f(b) = f(a + b)$

b Trouvez l'ensemble solution de l'équation $f(x + 1) = \frac{1}{9}$

11) Trouvez, graphiquement l'ensemble solution de l'équation suivante $x = 1 - \frac{1}{2}x$



Épreuve cumulative



1 Déterminez l'ensemble définition de chacune des fonctions définie ci-dessous :

a $f(x) = \sqrt{x - 2}$ b $f(x) = \frac{x - 2}{x}$ c $g(x) = \log_3(x - 2)$

2 Dans chacun des cas suivants, tracez la courbe représentative des fonctions ainsi définies en déduisez : l'ensemble image, le sens de variation et la parité de chacune des fonctions.

a $f(x) = (x - 2)^2$ b $f(x) = 3x - 1$

c $g(x) = 2 - |x|$ d $h(x) = 1 - \log_2 x$

3 Simplifiez :

a $\frac{\sqrt{a} \times \sqrt[12]{a^{-2}}}{\sqrt[3]{a}}$ b $(125)^{\frac{2}{3}} \times (81)^{\frac{1}{4}} \times (15)^{-1}$

4 Trouvez la valeur de ce qui suit sans utiliser la calculatrice :

a $(16)^{\frac{1}{4}}$ b $\sqrt[3]{27^{-2}}$ c $(3^{-1})^2 \times 9 \times (\sqrt[3]{15})^0$

d $\log 5 + \log \frac{1}{5}$ e $\log_9 \frac{1}{27}$ f $3\log_3 5 + \log_3 \frac{243}{125}$

5 Trouvez dans R l'ensemble solution de chacune des équations suivantes :

a $|x - 2| = 5$ b $3x^{-2} = \frac{1}{3}$

c $x^{-4} = \frac{1}{16}$ d $\log x = \log 3 + \log 10$

6 Calculez en utilisant la calculatrice :

a La valeur de x qui vérifie $x^{-2} = 25$ en arrondissant à deux d`décimales prés

b La valeur de $\frac{3^{750}}{5^{510}}$

7 Parmi les fonctions définies ci-dessous : Indiquez celle qui représente une croissance exponentielle et celle qui représente une décroissance exponentielle:

a $y = 3\ (1.05)^x$ b $y = 10(2.1)^{x+1}$

c $y = 0.4(\frac{1}{2})^x$ d $y = 0.2\ (3)^{1-x}$



Unité (3)

Limites

Introduction de l'unité

Calcule la dérivée et intégral est l'une des modernes branches des mathématiques. Cette branche consiste à l'étude des limites, continuité, dérivation et calcul intégral ainsi que les séries à l'infinie. Cette branche est utilisée pour l'étude et l'analyse des fonctions. Le calcul différentiel et intégral entre dans de nombreuses applications en géométrie et dans différents domaines lettress où il y a besoin d'étudier la variation de la fonction, son changement et la résolution des problèmes que l'algèbre ne peut résoudre facilement.

Compétences attendues de l'unité

Après l'étude de l'unité, il est prévu que l'élève soit capable de :

- Reconnaître les bases des limites.
- Reconnaître les formes indéterminées comme: $\frac{0}{0}$, $\frac{+\infty}{+\infty}$, $(+\infty) - (+\infty)$, $0 \times (+\infty)$
- Déterminer une méthode pour Calculez la limite d'une fonction : Par la substitution directe, par la factorisation, par la division euclidienne ou en multipliant par le conjugué.
- Calculez les limites en utilisant la formule $\lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = n\, a^{n-1}$
- Calculez les limites en utilisant la formule : $\lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x^m - a^m} = \frac{n}{m} a^{n-m}$
- Trouvez la limite d'une fonction à l'infini algébriquement et graphiquement.
- Utiliser les logiciels de graphisme pour vérifier la limite d'une fonction et pour estimer une limite sous forme d'activité.
- Reconnaitre des applications variées sur les notions de base des limites des fonctions.

Vocabulaires de base

- Quantité indéterminée
- Indéfini
- Limite d'une fonction
- Substitution directe
- Conjugate
- Fonction polynôme
- Limite d'une fonction à l'infini



Organigramme de l'unité

Limites

- Limite d'une fonction
  - Introdution aux limites
  - Limite en un point
  - Limite à l'infinie
    - Substitution direct
    - factorisation
    - Division euclidienne
    - Multiplication par le conjugé
    - Théorème $\lim\limits_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}$

Leçons de l'unité

Leçon (3 - 1) Introduction aux limites

Leçon (3 - 2) Limite d'une fonction algébriquement

Leçon (3 - 3) Limite d'une fonction à l'infini



Aides pédagogiques

Calculatrice – Ordinateur – Logiciels de graphisme

Unité 3

3 - 1 Introduction aux limites



Allez apprendre

- Quantités indéterminées.
- Limite d'une fonction en un point.

Vocabulaires de base

- Quantité indéterminée
- Indéfini
- Ensemble des nombres réels prolongé.
- Valeur de la fonction.
- Limite d'une fonction.



Aides pédagogiques

- Calculatrice lettres
- Logiciels de graphisme

La notion de la limite d'une fonction en un point est des notions essentielles en science de calcule différentiel. Cette notion est basée essentiellement sur l'étude du comportement de la fonction sur son ensemble de définition. C'est pour cela on doit reconnaitre les différentes quantités dans les nombres réelles.



Réfléchissez et discutez

Trouvez le résultat de ce qui suit, si cela est possible :

1. 3×5
2. $28 : 4$
3. $4 - 9$
4. $7 : 0$
5. $0 : 0$
6. $(+\infty) + 3$
7. $(+\infty) : (+\infty)$
8. $(+\infty) - (+\infty)$



Rapel

$+\infty$ est un symbole qui exprime le plus grand nombre qui, on peut imaginer.

Quantités indéterminées



A apprendre

Dans la rubrique « Réfléchissez et discutez » on trouve que les résultats des opérations sont parfaitement déterminés dans les questions 1 , 2 , 3 tandis qu'ils ne le sont pas dans les autres cas.

On remarque que 7 : 0 est indéfinie car la division par 0 n'a pas de sens. De même, on ne peut pas déterminer le résultat de l'opération $0 \div 0$ car il existe une infinité de nombres en les multipliant par 0 on obtient 0. C'est pour cela que $\frac{0}{0}$ est une quantité indéterminée.

Les quantités $(+\infty) : (+\infty)$; $(+\infty) - (+\infty)$; $0 \times (+\infty)$ sont également indéterminées **(Pourquoi) ?**



Pour votre connaissance

L'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty \ ; \ +\infty\}$ est appelé l'ensemble des nombres réels prolongé. On le note $\overline{\mathbb{R}}$, Si $a \in \mathbb{R}$, alors :

1. $(+\infty) + a = +\infty$
2. $-\infty + a = -\infty$
3. $\frac{a}{+\infty} = \frac{a}{-\infty} = 0$
4. $(+\infty) \times a = \begin{cases} -\infty , & \text{si } a < 0 \\ +\infty , & \text{si } a > 0 \end{cases}$
5. $-\infty \times a = \begin{cases} -\infty , & \text{si } a > 0 \\ +\infty , & \text{si } a < 0 \end{cases}$

Exemple

1. Trouvez le résultat de ce qui suit dans l'ensemble des nombres réels prolongé, si cela est possible :

a) $4 + (+\infty)$ b) $3 - (+\infty)$ c) $0 : 3$ d) $-5 : 0$

e) $0 + 0$ f) $0 : 0$ g) $5 \times (+\infty)$ h) $-6 \times (-\infty)$

Solution

a) $+\infty$ b) $-\infty$ c) 0 d) Indéfini

e) 0 f) Quantité indéterminée g) $+\infty$ h) $+\infty$



Essayez de résoudre

1. Trouvez le résultat de ce qui suit dans l'ensemble des nombres réels prolongé, si cela est possible :

a) $0 : (-2)$ b) $7 : 0$ c) $9 : (+\infty)$ d) $(+\infty) \times 0$

e) $(-7) \times (+\infty)$ f) $(-\infty) + 12$ g) $(+\infty) + (+\infty)$ h) $(+\infty) : (+\infty)$

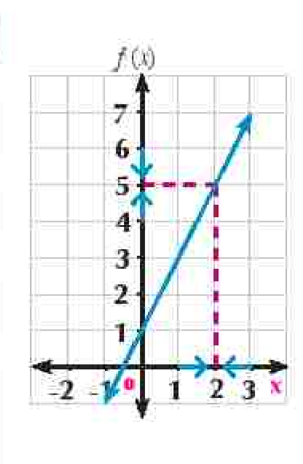
Limite d'une fonction en un point :

Activité

Etudiez les valeurs de la fonction f telle que $f(x) = 2x + 1$ quand x tend vers 2 à travers les données du tableau suivant :

x	$f(x)$
2,1	5,2
2,01	5,02
2,001	5,002
2,0001	5,0002
....	....
↓	↓
2	5
$x > 2$	
x tends vers 2 du coté du droite	

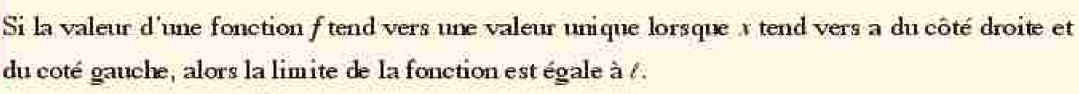
x	$f(x)$
1,9	4,8
1,99	4,98
1,999	4,998
1,9999	4,9998
....	....
↓	↓
2	5
$x < 2$	
x tends vers 2 du coté gauche	



On remarque que :

- Quand x tend vers le nombre 2 du côté droite ou du côté gauche, quelle la valeur atteinte par $f(x)$?
- Quand x tend vers le nombre 2 du côté droite ou du côté droite, quelle la valeur atteinte par $f(x)$?

Lorsque x tend vers le nombre 2 soit du côté droit et du côté gauche, alors $f(x)$ tend vers le nombre 5. On le note $\lim_{x \to 2} (2x + 1) = 5$



Si la valeur d'une fonction f tend vers une valeur unique lorsque x tend vers a du côté droite et du coté gauche, alors la limite de la fonction est égale à ℓ.

Elle symbolisée par $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ et **se lit** limite de $f(x)$ si x tend vers a est égale à ℓ

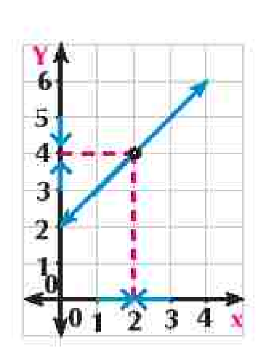
Exemple

(2) Soit $f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$. Etudiez les valeurs de $f(x)$ lorsque x tend vers 2.

Solution

x	$f(x)$
2,1	4,1
2,01	4,01
2,001	4,001
....	....
↓	↓
2	4
$x > 2$	

x	$f(x)$
1,9	3,9
1,99	3,99
1,999	3,999
....	....
↓	↓
2	4
$x < 2$	



D'après l'étude graphique et du tableau : on trouve que : $f(x) \longrightarrow 4$ lorsque $x \longrightarrow 2$ soit du côté droite ou du côté gauche $\therefore \lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$

Dans cet exemple, on remarque que :

1- Le rond vide dans la représentation graphique veut dire on a une forme indéterminée $\frac{0}{0}$ lorsque $x = 2$ (c'est-à-dire que la fonction n'est pas définie en $x = 2$)

2- L'existence d'une limite de la fonction si $x \longrightarrow 2$ ne veut pas nécessairement dire que la fonction est définie en $x = 2$.

Essayez de résoudre

(2) Soit $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$. Etudiez les valeurs de $f(x)$ lorsque x tend vers (-1).

Exemple

(3) Dans chacun des figures suivantes : Trouvez $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$

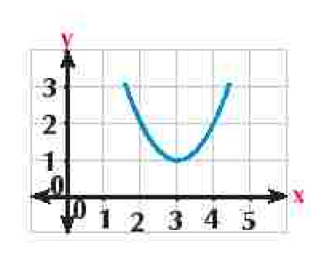


Figure (1)

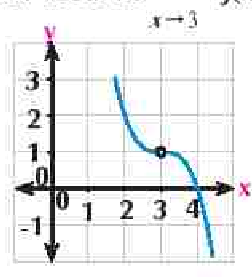


Figure (3)

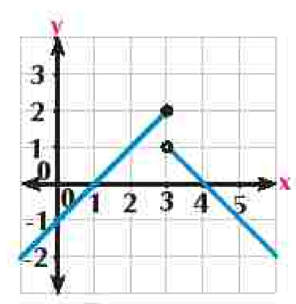


Figure (2)

Solution

Figure (1) $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 1$

Figure (2) $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 1$ (Remarquez que la fonction n'est pas définie en $x = 3$)

Figure (3) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ n'existe pas

Essayez de résoudre

3) Dans chacun des figures suivantes : Trouvez $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

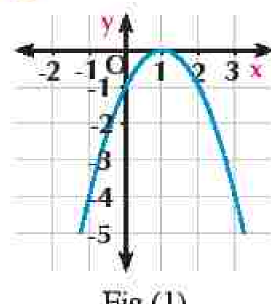


Fig (1)

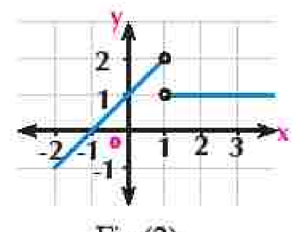


Fig (2)

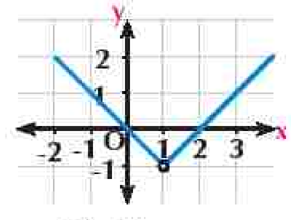


Fig (3)

D'après les exemples précédents, on remarque que :

L'existence d'une limite de la fonction si $x \longrightarrow$ a cela ne veut pas nécessairement dire que la fonction est définie en x = a et réciproquement si la fonction est définie en cela ne veut pas nécessairement dire que la fonction est définie en x = a

Expression orale :

Ecrivez une phrase sur la différence entre la valeur d'une fonction en un point la limite d'une fonction en même point.

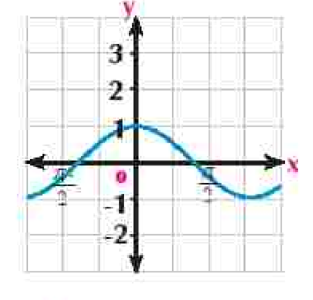


[I] Déterminé la limite graphiquement

1) Dans la représentation graphique ci-contre, trouvez :

a) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

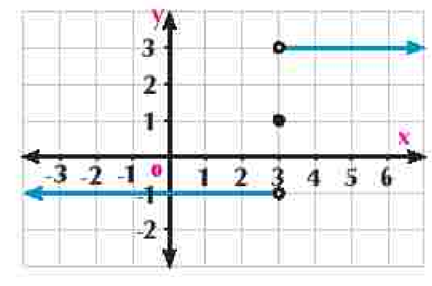
b) $f(0)$



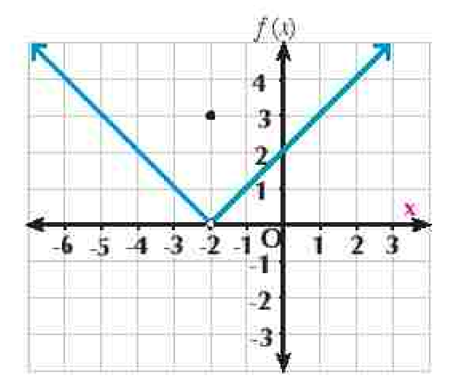
2) Dans la représentation graphique ci-contre, trouvez :

a) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$

b) $f(3)$



3. Dans la représentation graphique ci-contre, trouvez :



a) $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$

b) $f(-2)$

c) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

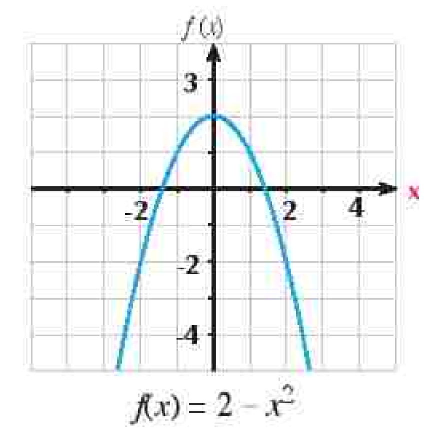
d) $f(0)$

4. La figure ci-contre est représentation graphique de la fonction $f(x) = 2 - x^2$

De la représentation graphique, trouvez :

a) $\lim\limits_{x \to 0} (2 - x^2)$

b) $f(0)$



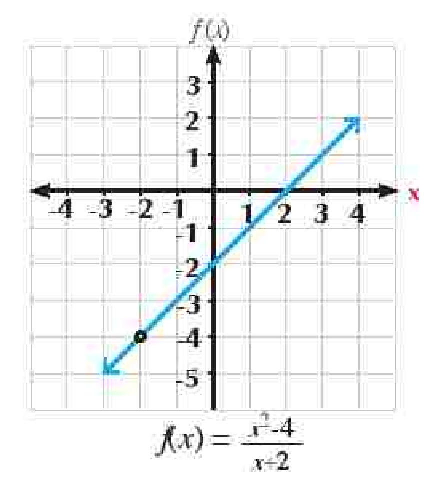
$f(x) = 2 - x^2$

5. La figure ci-contre est représentation graphique de la fonction $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2}$

De la représentation graphique, trouvez :

a) $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$

b) $f(-2)$



$f(x) = \frac{x^2-4}{x+2}$

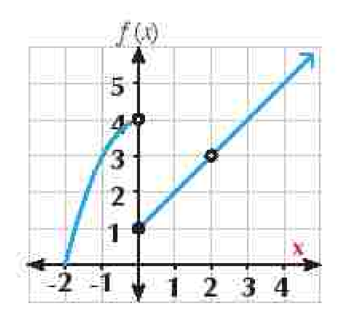
6. Dans la représentation graphique ci-contre, trouvez :

a) $f(0)$

b) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

c) $f(2)$

d) $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$



[II] Déterminé la limite d'après une interférence numérique (tableaux du calcule)

(7) Complétez le tableau suivant puis déduisez $\lim_{x \to 2} f(x)$ telle que $f(x) = 5x + 4$

x	1,9	1,99	1,999	⟶	2	⟵	2,001	2,01	2,1
$f(x)$				⟶	?	⟵			

(8) Complétez le tableau suivant puis déduisez $\lim_{x \to -1} (3x + 1)$

x	– 0,9	– 0,99	– 0,999	⟶	– 1	⟵	– 1,001	– 1,01	– 1,1
$f(x)$				⟶	?	⟵			

(9) Complétez le tableau suivant puis déduisez $\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1}$

x	– 0,9	– 0,99	– 0,999	⟶	– 1	⟵	– 1,001	– 1,01	– 1,1
$f(x)$				⟶	?	⟵			

(10) Complétez le tableau suivant puis déduisez $\lim_{x \to 2} \frac{x - 2}{x^2 - 4}$

x	1,9	1,99	1,999	⟶	2	⟵	2,001	2,01	2,1
$f(x)$				⟶	?	⟵			

Unité 3

3 - 2 Déterminé de la limite d'une fonction algébriquement



Allez apprendre

- Limite d'une fonction polynôme.
- Quelques théorèmes des limites.
- Utilisation de la division euclidienne pour Trouvez la limite d'une fonction.
- Utiliser le théorème : $\lim\limits_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}$



Vocabulaires de base

- Limite d'une fonction
- Substitution directe
- Factorisation
- Division composée
- Conjugué



Aides pédagogiques

- Calculatrice lettres
- Logiciels de graphisme

Dans ce qui suit nous allons présenter quelques théorèmes et résultats pour déterminer la limite d'une fonction sans parcourir aux tableaux du calcule.



Activité

Utilisez un logiciel de graphisme pour représenter graphiquement chacune des deux fonctions $f_1(x) = x^2 + 2$, $f_2(x) = 2x + 3$

1 - $f_1(1)$, $\lim\limits_{x \to 1} f_1(x)$ (Que remarquez-vous ?)

2 - $f_2(0)$, $\lim\limits_{x \to 0} f_2(x)$ (Que remarquez-vous ?)



A apprendre

Limite d'une fonction polynôme



Théorème 1

➤ **Si** f(x) est une fonction polynôme et a ∈ ℝ , **alors :**

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

Exemple

1 Trouvez la limite de chacune des fonctions suivantes :

a $\lim\limits_{x \to 2} (x^2 - 3x + 5)$ **b** $\lim\limits_{x \to 3} (-4)$

Solution

a $\lim\limits_{x \to 2} (x^2 - 3x + 5) = 4 - 6 + 5 = 3$ **(Par substitution directe)**

b $\lim\limits_{x \to 3} (-4) = -4$ **On remarque que** $f(x) = -4$ (constante) pour tout $x \in \mathbb{R}$

Essayez de résoudre

1 Trouvez la limite de chacune des fonctions suivantes :

a $\lim\limits_{x \to 1} (2x - 5)$ **b** $\lim\limits_{x \to -2} (3x^2 + x - 4)$

Théorème 2

Si $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$ $\lim_{x \to a} g(x) = m$

alors:

1- $\lim_{x \to a} c\, f(x) = c.\ell$ où $k \in \mathbb{R}$

2- $\lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \ell \pm m$

3- $\lim_{x \to a} f(x) \,.\, g(x) = \ell.m$

4- $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ell}{m}$ où $m \neq 0$

5- $\lim_{x \to a} (f(x))^n = \ell^n$ où $\ell^n \in \mathbb{R}$

Exemple

2) Trouvez la limite de chacune des fonctions suivantes :

a) $\lim_{x \to -1} \frac{3x + 7}{x^2 + 2x - 5}$

b) $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{x}$

Solution

a) $$\lim_{x \to -1} \frac{3x + 7}{x^2 + 2x - 5} = \frac{\lim_{x \to -1} (3x + 7)}{\lim_{x \to -1} (x^2 + 2x - 5)} = \frac{3 \times -1 + 7}{(-1)^2 + 2\,(-1) - 5} = \frac{4}{-6} = \frac{-2}{3}$$

b) $$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{x} = \frac{\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \tan x}{\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} x} = \frac{1}{\frac{\pi}{4}} = \frac{4}{\pi}$$



Essayez de résoudre

2) Calculez la limite de chacune des fonctions suivantes :

a) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 3}{2x + 1}$

b) $\lim_{x \to \pi} x \cos x$

Théorème 3

➤ Si $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R} - \{ a \}$

et $\lim_{x \to a} g(x) = \ell$ **alors** $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$

Exemple

3) Trouvez : $\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$

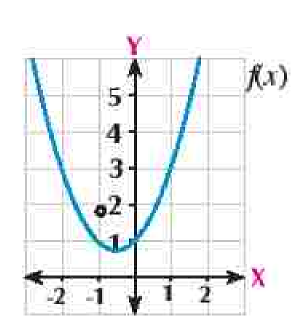
Solution

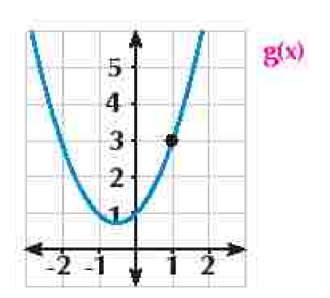
On remarque que $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$ est indéterminée en $x = 1$

En factorisant puis on divisant par les facteurs communs non nuls, nous pouvons écrire $f(x)$ sous la forme :

$$f(x) = \frac{(x - 1)\,(x^2 + x + 1)}{(x - 1)} = x^2 + x + 1$$

$$= g(x)$$





De ce qui précède, on trouve que $f(x) = g(x)$ pour tout $\neq 1$

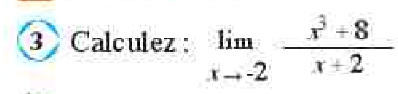
Comme $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = 3$ (une fonction polynôme)

Et d'après **le théorème précédent, on déduit que** $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 3$

$\therefore \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x - 1} = 3$



Essayez de résoudre



(3) Calculez : $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3 + 8}{x + 2}$



Exemple

(4) Trouvez : $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 2x^2 + 1}{x^2 + x - 2}$

Solution

On remarque que pour $x = 1$, la fonction du numérateur est $f(x) = 0$ et la fonction du numérateur est $g(x) = 0$. Cela signifie que $(x - 1)$ est un facteur commun du numérateur et du dénominateur. Vu la difficulté de factoriser la fonction du numérateur en deux facteurs dont l'un est $(x - 1)$, on utilise la méthode de la division euclidienne pour Trouvez l'autre facteur de l'expression $x3 - 2x^2 + 1$ comme suit :

$$
\begin{array}{r|l}
x^3 - 2x^2 \qquad + 1 & x - 1 \\
x^3 - x^2 \qquad\quad & x^2 - x - 1 \\
\hline
0 - x^2 \qquad + 1 & \\
- x^2 + x \qquad\quad & \\
\hline
0 - x + 1 & \\
- x + 1 & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

Pour cela :

$$\lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x^2 - x - 1)}{(x - 1)(x + 2)} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - x - 1}{x + 2} = -\frac{1}{3}$$

Essayez de résoudre

(4) a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - x^2 - 5x + 6}{x - 2}$

b) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^3 - 10x - 3}{x^2 + 2x - 3}$

Conseil pour la solution

Dans la division euclidienne:
(1) On range le dividende et le diviseur soit dans l'ordre croissant ou dans l'ordre décroissant.
(2) On divise le premier terme du dividende par le premier terme du diviseur et on écrit le résultat.
(3) On multiplie le résultat par le diviseur puis on retranche le produit du dividende pour obtenir le reste.
(4) On répète le même processus jusqu à la fin de la division .



Exemple

Utilisation du conjugué

(5) Calculez les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x-3}-1}{x-4}$

b) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x^2-5x}{\sqrt{x+4}-3}$

Solution

On remarque que : $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-3}-1}{x-4}$ est une quantité indéterminée $x = 4$ On cherche une méthode pour se débarrasser du facteur $(x-4)$ existant au numérateur et au dénominateur.

$$\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x-3}-1}{x-4} \times \frac{\sqrt{x-3}+1}{\sqrt{x-3}+1} = \lim_{x \to 4} \frac{x-3-1}{(x-4)(\sqrt{x-3}+1)}$$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x-3}+1)}$$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{1}{\sqrt{x-3}+1} = \frac{1}{2}$$

b) $$\lim_{x \to 5} \frac{x^2-5x}{\sqrt{x+4}-3} = \lim_{x \to 5} \frac{x^2-5x}{\sqrt{x+4}-3} \times \frac{\sqrt{x+4}+3}{\sqrt{x+4}+3}$$

$$= \lim_{x \to 5} \frac{x(x-5)(\sqrt{x+4}+3)}{x+4-9} = \lim_{x \to 5} \frac{x(x-5)(\sqrt{x+4}+3)}{(x-5)}$$

$$= \lim_{x \to 5} x(\sqrt{x+4}+3) = 5(3+3) = 30$$

Essayez de résoudre

(5) Calculez les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$

b) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x+1}{\sqrt{x+5}-2}$



Théorème 4

$$\lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x-a} = n\, a^{n-1}$$

Exemple

(6) Déterminez : $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^{19}-1}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^{19}-1^{19}}{x-1} = 19 \times 1^{18} = 19$



Corollaires

Corollaires issus du théorème :

1- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(x+a)^n - a^n}{x} = n\, a^{n-1}$

2- $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{x^n - a^n}{x^m - a^m} = \dfrac{n}{m}\, a^{n-m}$



Exemple

(7) Calculez :

a $\lim\limits_{x \to 0} \frac{(x+5)^4 - 625}{x}$

b $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^5 - 32}{x^2 - 4}$

c $\lim\limits_{x \to 0} \frac{(x+1)^{11} - 1}{x}$

d $\lim\limits_{x \to 2} \frac{(x-4)^5 + 32}{x - 2}$

Solution

a $= \lim\limits_{x \to 0} \frac{(x+5)^4 - 5^4}{x} = 4 \times 5^3 = 500$

b $= \lim\limits_{x \to 2} \frac{x^5 - 2^5}{x^2 - {}^{2}2} = \frac{5}{2} \times {}^{3}2 = 20$

c $\lim\limits_{x \to 0} \frac{(x+1)^{11} - 1^{11}}{x} = 11 \times 1^{11-1} = 11$

d $\lim\limits_{x \to 2} \frac{(x-4)^5 + 32}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} \frac{(x-4)^5 - (-2)^5}{(x-4) - (-2)}$

$= 5\,(-2)^4 = 80$

Essayez de résoudre

(6) Calculez :

a $\lim\limits_{x \to -5} \frac{x^4 - 625}{x + 5}$

b $\lim\limits_{e \to 0} \frac{(e+3)^4 - 81}{e}$

c $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{x}$

Exercices (3 - 2)

Complétez ce qui suit :

(1) $\lim\limits_{x \to 2} (3x + 1) =$ ....

(2) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x - 1}{x + 1} =$ ....

(3) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2 - x}{x} =$ ....

(4) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} =$ ....

(5) $\lim\limits_{x \to a} \frac{x^5 - a^5}{x - a} =$ ....

(6) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} =$ ....

(7) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} =$ ....

(8) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^4 - 16}{x - 2} =$ ....

(9) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^5 - 32}{x^3 - 8} =$ ....

(10) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{x^2 - 1}{x - 1}\right)^5 =$ ....

(11) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - x - 2}{2x - 4} =$ ....

(12) $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^7 + 1}{x^3 + 1} =$ ....

Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées :

13) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - 1}{x}$ est égale à:

a) 0
b) 1
c) 2
d) n'a pas de limite

14) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 + x}{x + 1}$ est égale à:

a) -1
b) 0
c) 1
d) 3

15) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x^2 - 8}{x - 2}$ est égale à:

a) 2
b) 4
c) 6
d) 8

16) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin x}{x}$ est égale à:

a) 1
b) $\dfrac{\pi}{2}$
c) $\dfrac{2}{\pi}$
d) n'a pas de limite

17) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\tan x}{x}$ est égale à:

a) $\dfrac{\pi}{2}$
b) 1
c) $\dfrac{4}{\pi}$
d) n'a pas de limite

Trouvez les limites suivantes (si elles existent)

18) $\lim\limits_{x \to 3} (x^2 - 3x + 2)$

19) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2 + 1}{x - 3}$

20) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (2x - \sin x)$

21) $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\cos 2x}{x}$

22) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x + 1}{x^3 + 1}$

23) $\lim\limits_{x \to 9} \dfrac{9 - x}{x^2 - 81}$

24) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^2 + 4}{x - 4}$

25) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + x}$

26) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{4x^2 - 64}{x - 4}$

27) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x^2 - 25x}{x - 5}$

(28) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 - x - 2}{x + 1}$

(29) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{5x^2 + 5}{3x^2 - 3}$

(30) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3 + 8}{x^2 - 4}$

(31) $\lim\limits_{x \to \frac{3}{2}} \dfrac{2x^2 - x - 3}{4x^2 - 9}$

(32) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x^2 - x - 6}{x^2 - x - 2}$

(33) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{2x^2 + 5x - 3}{x^2 + x - 6}$

(34) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(2x-1)^2 - 1}{5x}$

(35) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(x+1)^3 - 1}{x}$

(36) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{x^2}{x+1} - \dfrac{3x+4}{x+1}\right)$

(37) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{x - 1}$

(38) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 + x^2 - 2}{x - 1}$

(39) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 5x^2 - x}{x^4 + 2x}$

(40) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 + x - 2}{x^2 - 1}$

(41) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$

(42) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{4x - 3} - 3}{x - 3}$

(43) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x + 1} - 1}{x}$

(44) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{9x + 16} - 4}{x}$

(45) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^7 - 1}{x - 1}$

(46) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^4 - 16}{x - 2}$

(47) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^3 - 64}{x - 4}$

(48) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^5 - 243}{x - 3}$

(49) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^7 - 128}{2x - 4}$

(50) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^6 - 64}{x^5 - 32}$

(51) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{2x^3 - 128}{x^2 - 16}$

(52) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \dfrac{32x^5 - 1}{16x^4 - 1}$

(53) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^{\frac{7}{2}} - x^{\frac{1}{2}}}{x^2 - x}$

(54) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(x+1)^9 - 1}{x}$

(55) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(3 + h)^4 - 81}{6h}$

(56) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x+2)^4 - 81}{x - 1}$

Unité 3

Limite d'une fonction à l'infini

3 - 3

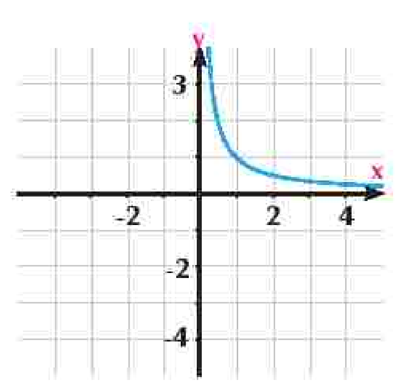
Dans beaucoup d'applications pratiques et de la vie quotidienne, nous avons besoin de connaitre le comportement d'une fonction f quand $x \longrightarrow +\infty$ L'activité suivante illustre cette situation.



Activité

Utilisez un logiciel de graphisme pour représenter la fonction f telle que $f(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$

telle Que se passe-t-il dans la courbe de la fonction quand les valeurs de x augmentent et tendent vers l'infini ?



- On remarque que quand x s'approche de l'infinie, la valeur de f(x) s'approche de zéro.



A apprendre

Limite d'une fonction à l'infini



Théorème 1

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Corollaires

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{a}{x^n} = 0 \quad \text{où } \{n \in \mathbb{R}^+, \text{ a est constant}\}$$

Formules de base :

- $\lim_{x \to +\infty} c = c$, où c est constante
- Si n est un nombre entier positif, alors $\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty$

Remarquez que : le théorème (2) déjà étudié dans la leçon précédente, concernant la limite d'une somme, d'une différence, d'un produit ou d'un quotient de deux fonctions quand $x \longrightarrow a$ est vrai aussi quand $x \longrightarrow +\infty$

Allez apprendre 

- Limite d'une fonction à l'infini.
- Recherche de la limite d'une fonction à l'infini par la résolution algébrique.
- Recherche de la limite d'une fonction à l'infini par la résolution graphique.

Vocabulaires de base 

- Limite d'une fonction à l'infini

Aides pédagogiques 

- Calculatrice scientifique
- Logiciels de graphisme

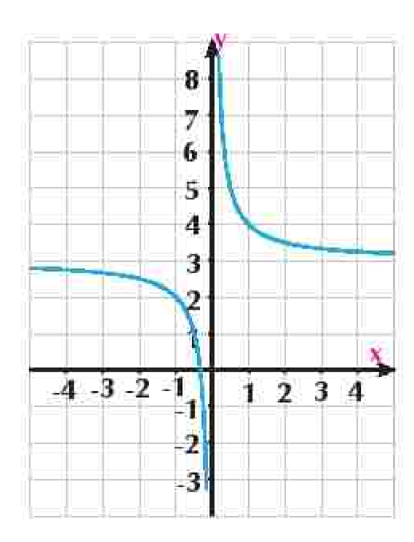


Exemple

1 Calculez :

a $\lim\limits_{x \to +\infty} (\frac{1}{x} + 3)$ b $\lim\limits_{x \to +\infty} (4 - \frac{3}{x^2})$

➢ En utilisant un logiciel de graphisme, vérifiez le résultat graphiquement.

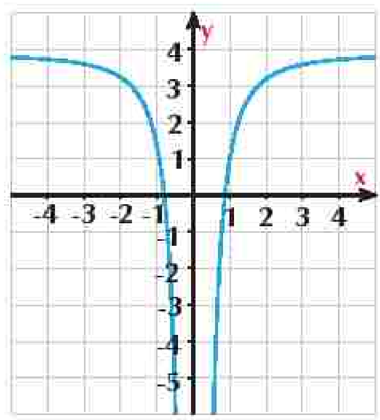


Solution

a $\lim\limits_{x \to +\infty} (\frac{1}{x} + 3) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} + \lim\limits_{x \to +\infty} 3$

$= 0 + 3 = 3$

$\therefore \lim\limits_{x \to +\infty} (\frac{1}{x} + 3) = 3$



b $\lim\limits_{x \to +\infty} (4 - \frac{3}{x^2}) = \lim\limits_{x \to +\infty} 4 - \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3}{x^2}$

$= 4 - 3 \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3}{x^2} = 4 - 3 \times 0 = 4$

$\therefore \lim\limits_{x \to +\infty} (4 - \frac{3}{x^2}) = 4$

Essayez de résoudre

1 Calculez :

a $\lim\limits_{x \to +\infty} (\frac{5}{x} + 2)$ b $\lim\limits_{x \to +\infty} (\frac{2}{x^2} + 5)$



Exemple

2 Calculez : $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 + 4x - 5)$

Solution

$$\lim_{x\to+\infty}(x^3+4x-5)=\lim_{x\to+\infty}x^3\left(1+\frac{4}{x^2}-\frac{5}{x^3}\right)\text{ en prenant } x^3 \text{ facteur commun}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x^3\times\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{4}{x^2}-\frac{5}{x^3}\right)=+\infty\times 1=+\infty$$

Essayez de résoudre

② Calculez les limites suivantes :

a $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3+7x^2+2)$

b $\lim\limits_{x\to+\infty}(4-3x-x^3)$

Exemple

③ Calculez les limites suivantes :

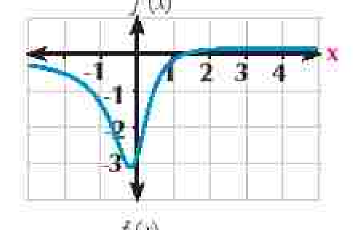
a $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-3}{3x^2+1}$

b $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2-3}{3x^2+1}$

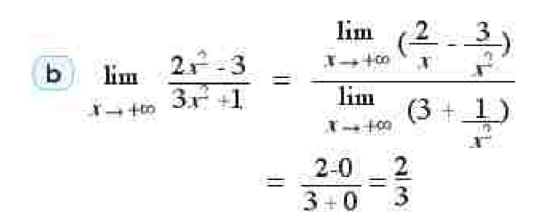
c $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3-3}{3x^2+1}$

Solution

Dans tous les cas, on divise le numérateur et le dénominateur par x^2 (la plus grande puissance existante au dénominateur).

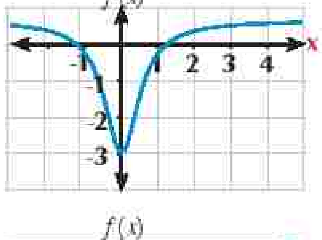


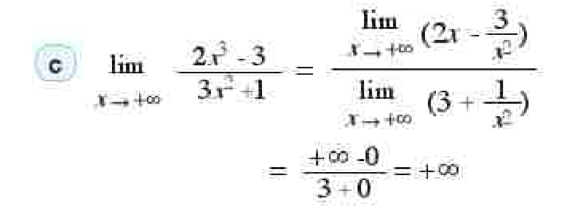
a $$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-3}{3x^2+1}=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3+\frac{1}{x^2}\right)}=\frac{0-0}{3+0}=0$$



b $$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-3}{3x^2+1}=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3+\frac{1}{x^2}\right)}$$

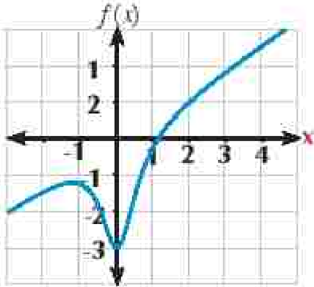
$$=\frac{2-0}{3+0}=\frac{2}{3}$$





c $$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3-3}{3x^2+1}=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x-\frac{3}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3+\frac{1}{x^2}\right)}$$

$$=\frac{+\infty-0}{3+0}=+\infty$$



De l'exemple précédent, on déduit que le calcul de $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ où $f(x)$ et $g(x)$ sont deux fonctions polynômes:

- La limite est un nombre réel différent de zéro si le degré du numérateur = le degré du dénominateur.
- La limite est égale à zéro si le degré du numérateur < degré du dénominateur.
- La limite est égale à $\pm\infty$ si le degré du numérateur > degré du dénominateur.

Essayez de résoudre

3 Calculez :

a $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x^2 - 3x + 1}{2x}$ **b** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4x^3 - 5x}{8x^4 + 3x^2 - 2}$ **c** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-6x^2 + 1}{3x^2 + x - 2}$



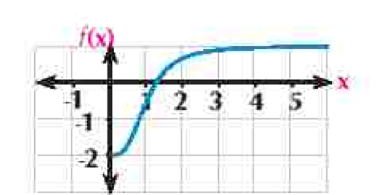
Exemple

4 Calculez les limites suivantes :

a $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 - 2}{|x|^3 + 1}$ **b** $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - \sqrt{x^2 + 4})$

Solution

a $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 - 2}{|x|^3 + 1}$



$f(x) = \dfrac{x^3 - 2}{|x|^3 + 1}$

$\because x \longrightarrow +\infty$

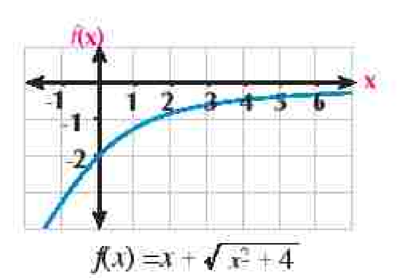
$\therefore x > 0$ **d'où** $|x| = x$

$\therefore \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 - 2}{x^3 + 1}$

En divisant le numérateur et le dénominateur par x^3

$$= \frac{\lim\limits_{x \to +\infty} (1 - \frac{2}{x^3})}{\lim\limits_{x \to +\infty} (1 + \frac{1}{x^3})} = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1$$

b $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - \sqrt{x^2 + 4})$



$f(x) = x + \sqrt{x^2 + 4}$

$$= \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(x - \sqrt{x^2 + 4})}{1} \times \frac{(x + \sqrt{x^2 + 4})}{(x + \sqrt{x^2 + 4})}$$

$$= \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2 - x^2 - 4}{x + \sqrt{x^2 + 4}}$$

$$= \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-4}{x + \sqrt{x^2 + 4}}$$

$\because x \longrightarrow +\infty$

$\therefore x > 0 \longleftarrow \sqrt{x^2} = |x| = x$ En divisant le numérateur et le dénominateur par $x = \sqrt{x^2}$

$$\therefore \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-4}{x + \sqrt{x^2 + 4}} = \frac{\lim\limits_{x \to +\infty} -\frac{4}{x}}{\lim\limits_{x \to +\infty} (1 + \sqrt{1 + \frac{4}{x^2}})} = \frac{0}{1 + 1} = 0$$

Essayez de résoudre

4 Calculez :

a $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x - 3}{\sqrt{4x^2 + 25}}$ **b** $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{3x^2 + 5x} - \sqrt{3}\,x)$



Exercices (3 - 3)



Complétez ce qui suit :

1. $\lim_{x \to +\infty} (1 + \frac{3}{x}) =$ ....
2. $\lim_{x \to +\infty} (\frac{3}{x^2} - 2) =$ ....
3. $\lim_{x \to +\infty} (-7) =$ ....
4. $\lim_{x \to +\infty} (x^2 - 3) =$ ....
5. $\lim_{x \to +\infty} \frac{2x+1}{x}$ ....
6. $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 - 5}{x^2 + 1} =$ ....
7. $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^5 + 3}{x^3 - 5} =$ ....
8. $\lim_{x \to +\infty} \frac{3x}{\sqrt{x^2 - 1}} =$ ....
9. $\lim_{x \to +\infty} (3 - \frac{7}{x} + \frac{4}{x^2}) =$ ....
10. $\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2+1} - x) =$ ....

Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées :

11. $\lim_{x \to +\infty} \frac{6x}{2x+3}$ est égale à:

a) 0 b) 2 c) 3 d) $+\infty$

12. $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{4}{x}+1}$

a) 0 b) 1 c) 2 d) $+\infty$

13. $\lim_{x \to +\infty} \frac{x+3}{2-x^2}$

a) 0 b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{3}{2}$ d) $+\infty$

14. $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+1}{2x-1}$

a) 0 b) $\frac{1}{2}$ c) 1 d) $+\infty$

15. $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{1+x}{4x-1}}$

a) -1 b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{2}$ d) 1

Trouvé la limite d'une fonction à l'infinie

16. $\lim_{x \to +\infty} \frac{3}{x^2}$
17. $\lim_{x \to +\infty} (x^3 + 5x^2 + 1)$
18. $\lim_{x \to +\infty} \frac{2-7x}{2+3x}$
19. $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x+3}$
20. $\lim_{x \to +\infty} \frac{4x^2}{x^2+3}$
21. $\lim_{x \to +\infty} \frac{5-6x-3x^2}{2x^2+x+4}$
22. $\lim_{x \to +\infty} \frac{2x-1}{x^2+4x+1}$
23. $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3-2}{3x^2+4x-1}$
24. $\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2-1}{4x^3-5x-1}$
25. $\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2-6}{(x-1)^2}$
26. $\lim_{x \to +\infty} (7 + \frac{2x^2}{(x+3)^2})$
27. $\lim_{x \to +\infty} (\frac{1}{3x^2} - \frac{5x}{2+x})$
28. $\lim_{x \to +\infty} (\frac{x}{2x+1} + \frac{3x^2}{(x-3)^2})$
29. $\lim_{x \to +\infty} \frac{-x}{\sqrt{4+x^2}}$

(30) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{4x^2 - 2x + 1} - 2x)$ (31) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{5x^2 + 4x + 7} - \sqrt{5x^2 + x + 3})$

(32) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 + x - 1}{8x^2 - 3}$ (33) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4 - 3x^3}{\sqrt{x^6 + 9}}$

Réflexion créative

Une entreprise produit des cartes de vœux. Le coût fixe d'une production s'élève à 5000 Livres. De plus, se rajoute une demie Livres par carte produite. Le coût total de la production est $S = \frac{1}{2}x + 5000$ où est le nombre de cartes produites

Trouvez :

(1) le coût de la production d'une cartes si l'entreprise produit :

a) 10000 cartes b) 100000 cartes

(2) le coût de la production d'une carte si l'entreprise produit une infinité de cartes.



Activité

Utilisé un logiciel de graphisme pour trouver la limite d'une fonction en un point (calculatrice graphique). Utilisez un logiciel de graphisme pour représenter chacune des fonctions suivantes puis trouvez la limite de la fonction au point indiqué :

a) $f(x) = x^3$ si $x = 0$ b) $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$ si $x = 1$

c) $f(x) = \dfrac{\sin 2^2 x}{x^2}$ si $x = 0$

Solution

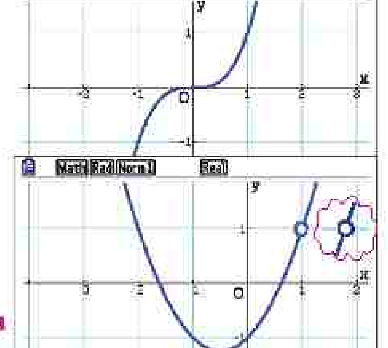
a) En utilisant la calculatrice, on représente la fonction $f(x) = x^3$

Du graphique $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

b) En utilisant la calculatrice, on représente la fonction

$f(x)\ (\dfrac{x^3 - 1}{x - 1}) - 2$

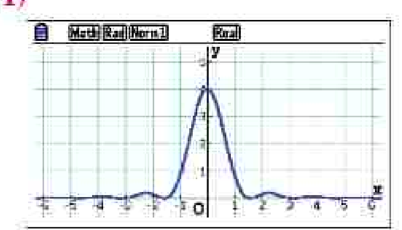
Du graphique $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1$ **Remarquez le rend vide au point de coordonnées (1 ; 1)**



c) En utilisant la calculatrice, on représente la fonction

$f(x) = \dfrac{\sin 2^2 x}{x^2}$

Du graphique $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 2^2 x}{x^2} = 4$



Résumé de l'unité

➢ L'ensemble des nombres réels prolongé $\overline{\mathbb{R}} = \overline{\mathbb{R}} \cup \{-\infty ; +\infty\}$

1. $+\infty + a = +\infty$
2. $-\infty + a = -\infty$
3. $\frac{a}{+\infty} = \frac{a}{-\infty} = 0$
4. $+\infty \times a = \begin{cases} -\infty \text{ ; si } a < 0 \\ +\infty \text{ ; si } a > 0 \end{cases}$
5. $-\infty \times a = \begin{cases} -\infty \text{ ; si } a > 0 \\ +\infty \text{ ; si } a < 0 \end{cases}$

➢ Si la valeur de la fonction $f(x)$ tendent vers une valeur réelle unique ℓ quand x tend vers le nombre réel a soit du côté droit et du côté gauche, alors la limite de la fonction est égale à ℓ.On le note $f(x) = \ell$. Il se lit la limite de la fonction $f(x)$ si x tends vers a est égale à ℓ.

➢ L'existence de la limite d'une fonction quand $x \longrightarrow$ a ne signifie pas forcement que la fonction est définie en x = a . Réciproquement, une fonction est définie en x = a ne signifie pas forcement que la fonction admet une limite quand $x \longrightarrow$ a .

➢ si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ $\lim\limits_{x \to a} g(x) = m$ **alors:**

1. $\lim\limits_{x \to a} c\, f(x) = k.\ell$ ou $k \in \mathbb{R}$
2. $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \ell \pm m$
3. $\lim\limits_{x \to a} f(x) \,.\, g(x) = \ell.m$
4. $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{X(x)} = \frac{\ell}{m}$ et $m \neq 0$
5. $\lim\limits_{x \to a} (f(x))^n = \ell^n$ où $\ell^n \in \mathbb{R}$

➢ Limite d'une fonction à l'infinie.

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ell}{x} = 0$
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{a}{x^n} = 0$ {où $n \in \mathbb{R}_+$, a constant}
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} c = c$, ou c constant si où n est un nombre entier positive $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$

➢ Pour trouver la limite $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ où $f(x)$ et $g(x)$ sont des fonctions polynômes, alors :

1. La limite est un nombre réelle non nul si le degré du numérateur = degré du dénominateur.
2. La limite est égale à zéro si le degré du numérateur < degré du dénominateur.
3. La limite est égale à $\pm\infty$ si le degré du numérateur > degré du dénominateur.

➢ Pour effectuer la division euclidienne, on suit les étapes suivantes :

1. On écrit les termes du dividende et ceux du diviseur dans l'ordre croissant ou dans l'ordre décroissant.
2. On divise le premier terme du dividende par le premier terme de diviseur et on écrit le résultat de la division.
3. On multiplie le résultat de la division par le diviseur et on soustrait pour obtenir le reste.
4. On continue par la même façon jusqu'à la fin de la division.

 **Exercices généraux** 

1 Complétez à l'aide de la représentation graphique :

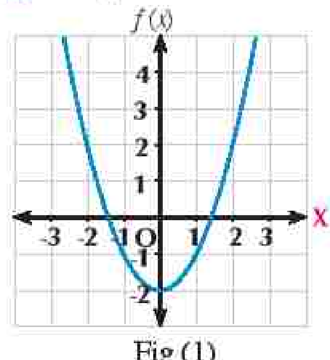


Fig (1)

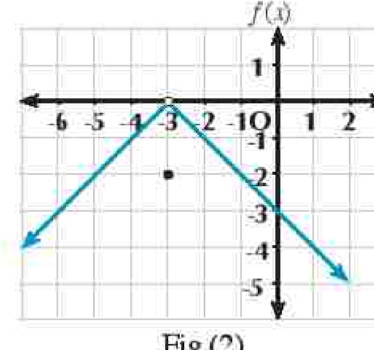


Fig (2)

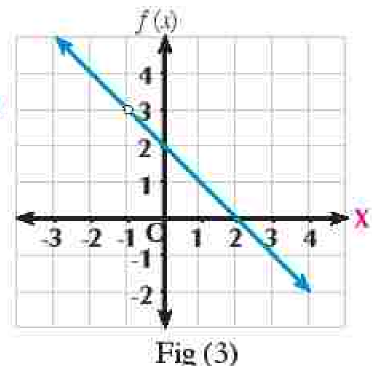
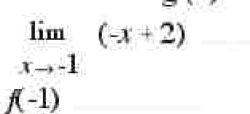


Fig (3)



$\lim_{x \to -1} (-x+2)$ ....

$f(-1)$ ....

$\lim_{x \to -3} f(x)$ ....

$f(-3)$ ....

$\lim_{x \to 0} (x^2-2)$ ....

$f(0)$ ....

2 Complétez le tableau suivant et déduisez $\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$

x	0.9	0.99	0.999	⟶	1	⟵	1.001	1.01	1.1
f(x)				⟶		⟵			

3 Soit la fonction f telle que : $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-x-2}{x-2} & \text{si } x \neq 2 \\ k & \text{en } x = 2 \end{cases}$

Construisez un tableau pour étudier les valeurs de la fonction lorsque $x \longrightarrow 2$ puis trouvez la valeur de k si $f(2) = \lim_{x \to 2} \frac{x^2-x-2}{x-2}$

Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées :

4 $\lim_{x \to 0} \frac{x^2+x}{x}$ est égale à:

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3

5 $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3+2}{x^2+1}$ est égale à:

a) 1 b) 2 c) 0 d) $+\infty$

6 $\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2+1} - x)$ est égale à:

a) -1 b) 0 c) 1 d) $+\infty$

Trouvez les limites suivantes elles existent :

7 $\lim_{x \to -2} \frac{x+7}{x+2}$

8 $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

9 $\lim_{x \to 3} \frac{x^3-27}{x-3}$

10 $\lim_{x \to 8} \frac{x^2-6x-16}{x-8}$

11 $\lim_{x \to 2} \frac{x^7-128}{x^3-8}$

12 $\lim_{x \to 0} \frac{(x+1)^{10}-1}{x}$

13 $\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^3-1}{x^2+1}$

14 $\lim_{x \to +\infty} \frac{7x^3-5}{3x^2-x}$

15 $\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2+5x+1}{3x^2-7}$



Épreuve cumulative



1 Simplifiez les expressions suivantes :

a) $\frac{x}{x^2 - x}$ b) $\frac{x+1}{x^2+2x+1}$ c) $\frac{x^2 - 25}{(x-5)^2}$ d) $\frac{x+3}{x^3 - 9x}$

2 Soient $f_1(x) = \frac{2x}{2x+8}$, $f_2(x) = \frac{x^2+4x}{x^2+8x+16}$. Est-ce que $f_1(x) = f_2(x)$ Vérifiez votre réponse.

3 Soient $f_1(x) = \frac{4}{x+1}$, $f_2(x) = \frac{3}{x-1}$ Trouvez $f_1(x) = f_1(x) + f_2(x)$, précisez l'ensemble de définition de f.

4 Mettez la fonction f sous la forme la plus simple où $f(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}$ en précisant son ensemble de définition.

5 Mettez la fonction g sous la forme la plus simple où $g(x) = \frac{x^2-1}{x^2} + \frac{x+5}{3x}$ en précisant son ensemble de définition .

6 Ecrivez une proposition symbolique pour exprimer la phrase suivante :
Si la valeur de la fonction $f(x)$ tendent vers une valeur réelle unique ℓ quand x tend vers le nombre réel a soit du côté droit et du côté gauche, alors la limite de la fonction est égale à ℓ.

7 Si $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ étudiez les valeurs de x lorsque x s'approche de 1

8 Soit la fonction f telle que $f(x)$ $\begin{cases} x & \text{si } x < 2 \\ x+2 & \text{si } x \leqslant 2 \end{cases}$

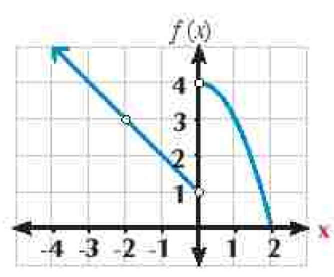
Tracez la courbe représentative de f, puis étudier l'existence de $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

9 Donnez un exemple pour qui explique ce que suit :

a) L'existence d'une limite de la fonction si $x \longrightarrow 1$ ne veut pas nécessairement dire que la fonction est définie en $x = 1$

b) Si la fonction est définie en $x = 1$, cela ne veut pas nécessairement dire que l'existence d'une limite de la fonction si $x \longrightarrow 1$.

10 Dans la figure ci-contre, trouvez :



a) $f(0)$ b) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

c) $f(-2)$ d) $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$

11 Calculez les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{7x}{2x+5}$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{4x^2}{3-x}$ c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{|x|}{x}$ d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2+1-x}{x}\right)$

e) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2-5x+6}{x-2}$ f) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$



Trigonométrie

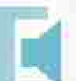
Introduction de l'unité

La trigonométrie est l'un des branches des mathématiques dont les pharaons sont des premiers qui le sont utilisé. Ils sont utilisés les règles trigonométriques pour bâtir les pyramides et les temples. Les grecs ont élaboré les règles trigonométriques pour trouver des relations liant les longueurs des cotés d'un triangle par les mesures de ses angles. Ils ont également créé une méthode pour élaborer les tableaux des sinus dans le triangle. Nous signalons ici que le mathématicien Leonhard Euler (1707-1783) qui a présenté une nouvelle expression des fonctions trigonométriques. Il a également présenté beaucoup des symboles qui sont utilisés dans les problèmes de mathématiques présentés actuellement à nos étudiants dans les écoles et les universités. Dans cet unité, nous allons étudier les règles qui relient les longueurs des cotés d'un triangle par la mesure de ses angles

Compétences attendues de l'unité

Après l'étude de l'unité, il est prévu que l'élève soit capable de:

- Déduire la loi de sinus dans un triangle dont l'énoncé est : « Dans tout triangle les longueurs des côtés sont proportionnelles aux sinus des angles opposés.».
- Utiliser la loi de sinus pour trouver les longueurs des côtés d'un triangle.
- Utiliser la loi de sinus pour trouver les mesures des angles d'un triangle (Il y a deux solutions pour un angle inconnu).
- Déduire la relation entre la loi de sinus dans un triangle et la longueur du rayon du cercle circonscrit au triangle et utiliser cette relation pour résoudre des exercices variés.
- Identifier et déduire la loi de cosinus dans un triangle.
- Utiliser la loi de cosinus pour trouver la longueur d'un côté inconnu dans un triangle.
- Utiliser la loi de cosinus pour trouver la mesure d'un angle inconnu dans un triangle.
- Utiliser les lois de sinus et cosinus pour résoudre un triangle.
- Utiliser la calculatrice pour résoudre des exercices et des activités variées en utilisant les lois de sinus et cosinus dans un triangle.



Vocabulaires de base

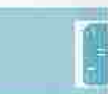
- Trigonométrie
- Loi de sinus
- Loi de cosinus
- Angle aigu
- Angle obtus
- Angle droit
- Le plus petit côté
- Le plus long côté
- Aire du triangle
- Longueurs des cotés d'un triangle
- Angles inconnus
- Le plus petit angle
- Le plus grand angle
- Angle opposé



Leçons de l'unité

Leçon (4-1): Loi de sinus

Leçon (4-2): Loi de cosinus



Aides pédagogiques

Calculatrice scientifique



Organigramme de l'unité

Lois de cosinus
- Applications géométrique et de lavie csurante dans triangle
- Trouvé la mesure d'un angle inconnue dans triangle
- Trouvé la longueur d'un coté in connue dans triangle

Lois de sinus
- Applications géométrique et de lavie csurante dans triangle
- Trouvé la mesure d'un angle inconnue dans triangle
- Trouvé la longueur d'un coté in connue dans triangle

Résolution générale du triangle
- étant donné les longueurs de ses trois côtés
- étant donné les longueurs de deux côte et la mesure de l'angle compris entre eux
- étant donné les mesures de deux angles et la longueur d'un côté

Unité 4

4 - 1 Loi de sinus



Allez apprendre

- Lois de sinus dans un triangle.
- Utilisation de la loi de sinus pour résoudre un triangle.
- Modéliser et résoudre des problèmes quotidiens utilisant la loi de sinus.
- Utilisation de la relation entre la loi de sinus dans un triangle et la longueur du rayon du cercle circonscrit au triangle pour résoudre des problèmes.



Vocabulaires de base

- Trigonométrie
- Loi de sinus
- Angle aigu
- Angle obtus
- Angle droit
- Cas ambigu



Aides pédagogiques

- Calculatrice lettre
- Logicials de graphique




Rappel

Les angles inscrits interceptant le même arc ont la même mesure. L'angle inscrit en demi cercle est droit



Préliminaire

On a étudié comment on peut résoudre un triangle rectangle. On va étudier comment on peut résoudre des triangles non rectangles. On sait qu'un triangle a six éléments : trois côtés et trois angles. Si on a trois de ces éléments (parmi eux la longueur d'un côté), on peut trouver les trois autres éléments en utilisant les lois des sinus et la loi des cosinus. Dans ce moment, on dit qu'on a résolu ce triangle.



A apprendre

Loi (règle) de sinus

Les figures suivantes représentent trois sortes des triangles.

acutangle | obtusangle | rectangle

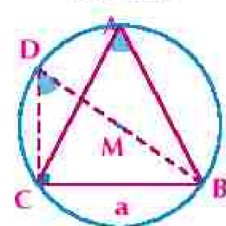


Figure (1)

$m(\angle A) = m(\angle D)$

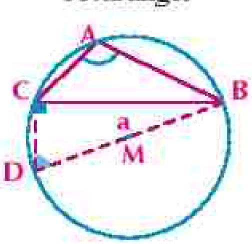


Figure (2)

$m(\angle A) = 180° - m(\hat{D})$

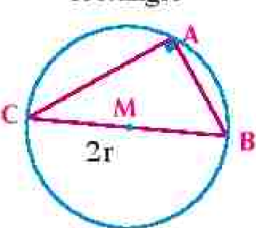


Figure (3)

$m(\angle A) = 90°$

Dans la figure (1) puisque $\triangle ABC$ est un triangle acutangle, alors

$\sin A = \sin D = \frac{a}{2r}$

De même on peut déduire que $\sin B = \frac{b}{2r}$, $\sin C = \frac{c}{2r}$

Dans la figure (2) puisque $\triangle ABC$ est un triangle obtusangle en A

$\sin A = \sin(180° - D) = \sin D$

$\sin(180° - D) = \sin D]$

$\sin D = \frac{a}{2r}$ et $\sin A = \frac{a}{2r}$

De même on peut déduire que :

$\sin B = \frac{b}{2r}$, $\sin C = \frac{c}{2r}$



Remerque

Dans $\triangle$ ABC : a , b et c sont les symbole des côtés $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ respectivement.

«A l'aide de votre professeur démontrez cette relation»

Maintenant: essayez de démontrer cette relation si le triangle est rectangle en A

En général dans un triangle ABC on a:

> $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2r$ où r est le rayon du cercle circonscrit au triangle.
> C'est-à-dire que : Dans un triangle, les longueurs des cotés d'un triangle sont proportionnelles aux sinus des angles qui lui sont opposés. **La loi de sinus**



Auto-apprentissage

Démontrez la loi de sinus par d'autres méthodes

Utilisé la loi (règle) de sinus pour trouver les longueurs des cotés dans un triangle:



(1) ABC est un triangle tel que m$(\angle A) = 75^\circ$, m$(\angle B) = 34^\circ$ et $a = 10.2$ cm, Calculer b et c à un centimètre près



$\because$ m$(\angle A)$ + m$(\angle B)$ + m$(\angle C) = 180^\circ$

$\therefore$ m$(\angle C) = 180^\circ - (75^\circ + 34^\circ)$

$= 71^\circ$

On utilise la règle de sinus pour déterminer b et c

$\because \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ $\quad\therefore \frac{10.2}{\sin 75^\circ} = \frac{b}{\sin 34^\circ} = \frac{c}{\sin 71^\circ}$

$b = \frac{10.2 \times \sin 34^\circ}{\sin 75^\circ} \simeq 6$cm En utilisant la calculatrice

1 0 . 2 × sin 3 4 °'") ÷ sin 7 5 °'") =

$c = \frac{10.2 \times \sin 71^\circ}{\sin 75^\circ} \simeq 10$cm En utilisant la calculatrice



Essayez de résoudre

(1) ABC est un triangle tel que m$(\angle C) = 61^\circ$, m$(\angle B) = 71^\circ$ et $b = 91$cm, Calculez a et c à un centimètre près

Déterminé la longueur du plus long côté d'un triangle



(2) Déterminez la longueur du plus long côté dans le triangle ABC dans lequel m$(\angle A) = 49^\circ\ 11'$, m$(\angle B) = 76^\circ\ 17'$, $c = 11.22$cm (Donnez une valeur approchée à deux dicimal prés au résultat).





Au plus long côte d'un triangle est opposé l'angle dont la mesure la plus grande et réciproquement

Solution

$\because$ m($\angle$C) = 180° - [m ($\angle$A) + m($\angle$B)] = 180 °- (49° 11' + 76° 17') = 54° 32'

Le plus long côté qui est opposé l'angle B, c'est-à-dire qu'on veut calculer b

$\because \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$ $\qquad\therefore \dfrac{b}{\sin 76°\ 17'} = \dfrac{11.22}{\sin 54°\ 32'}$

$\therefore b = \dfrac{11.22 \times \sin 76°\ 17'}{\sin 54°\ 32'} \simeq 13.38\text{cm}$

Essayez de résoudre

(2) Déterminez la longueur du côté du plus court dans le triangle ABC tel que m($\angle$A) = 43°, m($\angle$B) = 65°, c = 8.4 cm en arrondissant le résultat à un décimal près.

Résolution d'un triangle en utilisant la loi de sinus

Résoudre un triangle consiste à trouver les mesures de ses éléments inconnus en connaissant trois de six éléments dont au moins de ses éléments est la longueur d'un côté. Car on ne peut pas résoudre le triangle en connaissant seulement les mesures de ses trios angles. La loi des sinus permet de résoudre un triangle en connaissant les mesures de deux angles et la longueur d'un côté du triangle.

(I) Résolution d'un triangle en connaissant la longueur d'un côté et les mesures de deux angles:

Pour résoudre un triangle ABC en connaissant les mesures de deux angles B , C et la longueur du côté a, on suit les étapes suivantes:

1- On utilise la relation m($\angle$A) + m($\angle$B) + m($\angle$C) = 180° pour calculer m($\angle$A)

2- On utilise la loi des sinus: $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B}$ pour calculer b

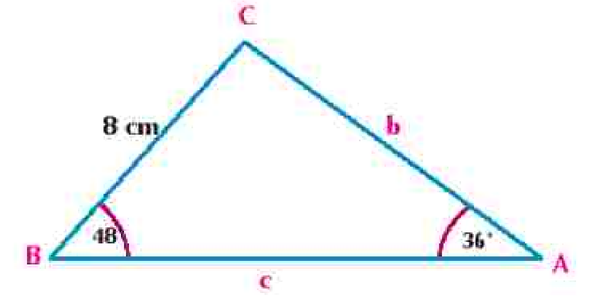
3- On utilise la loi des sinus: $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{c}{\sin C}$ pour calculer c

Dans ce qui suit, il y des exemples illustratifs:

Exemple

(3) Résoudre le triangle ABC tel que m($\angle$A) = 36°, m($\angle$B) = 48°, a = 8 cm en approchant le résultat à trois décimale près.

Solution



On trouve m($\angle$C) :

m($\angle$C) = 180° - (36° + 48°) = 96°

On détermine b en utilisant la règle de sinus:

$\because \dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B}$ $\qquad\therefore \dfrac{8}{\sin 36^\circ} = \dfrac{b}{\sin 48^\circ}$

$\because b = \dfrac{8 \times \sin 48^\circ}{\sin 36^\circ}$ $\qquad\therefore b \simeq 10.115\text{cm}$

En utilisant une calculatrice :



$\because \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$ $\therefore \frac{8}{\sin 36^\circ} = \frac{c}{\sin 96^\circ}$

$\therefore c = \frac{8 \times \sin 96^\circ}{\sin 36^\circ} \simeq 13.535 \text{cm}$

En utilisant une calculatrice :



Essayez de résoudre

(3) Résoudre le triangle XYZ tel que y = 107.2cm, $m(\angle x) = 33^\circ\ 16'$, $m(\angle z) = 44^\circ\ 19'$

Applications géométriques

Relation entre la règle de sinus et le rayon du cercle circonscrit au triangle

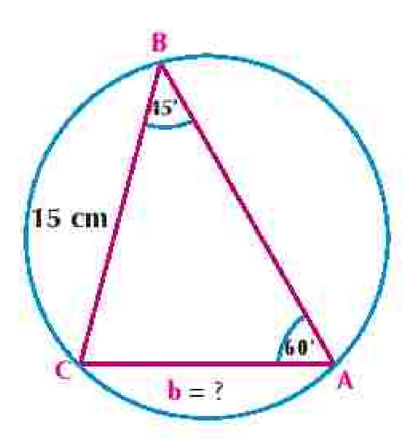
On a déjà étudié: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2\, r$ où r est le rayon du cercle circonscrit au triangle



Exemple

(4) ABC est un triangle tel que a = 15cm, $m(\angle A) = 60^\circ$ et $m(\angle B) = 45^\circ$ Calculez c c et la longueur du rayon du cercle circonscrit au triangle ABC en arrondissant le résultat à une unité près.

Solution



On trouve $m(\angle C)$:

$m(\angle C) = 180^\circ - [60^\circ + 45^\circ]$

$= 180^\circ - 105^\circ = 75^\circ$

On utilise la règle de sinus pour trouver c :

$\because \frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A}$ $\therefore \frac{c}{\sin 75^\circ} = \frac{15}{\sin 60^\circ}$

$c = \frac{15 \times \sin 75^\circ}{\sin 60^\circ} \simeq 17 \text{ cm}$

Pour trouver la longueur du rayon du cercle circonscrit au triangle ABC, on utilise la relation:

$\frac{a}{\sin A} = 2r$ $\therefore \frac{15}{\sin 60^\circ} = 2r$ $\therefore 2r \times \sin 60^\circ = 15$

$\therefore r = \frac{15}{2 \sin 60^\circ} \simeq 9 \text{cm}$

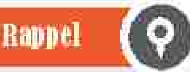


Essayez de résoudre

(4) ABC est un triangle tel que $m(\angle A) = 64^\circ\ 23'$, $m(\angle B) = 72^\circ\ 23'$ et c = 18 cm. Calculez a, b et la longueur du rayon du cercle circonscrit au triangle ABC.



Exemple



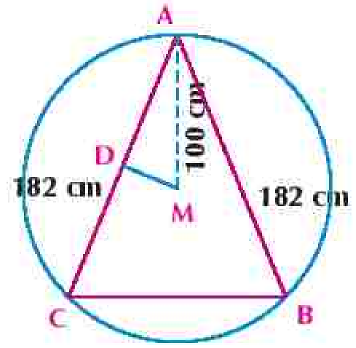
Aire d'un triangle = $\frac{1}{2}$ produit de deux côtes × sin angle compris

(5) ABC est un triangle inscrit dans un cercle tel que AB = AC = 182 cm et la longueur du rayon du cercle est 100 cm. Calculez

a) la longueur de la base $\overline{BC}$ à un décimal près.

b) l'aire du triangle ABC à un cm carré près.

Solution



On trouve m($\angle$B):

Dans $\triangle$ ABC on a :

$\frac{AC}{\sin B} = 2r$ (Lois de sinus)

$\frac{182}{\sin B} = 200$ $\sin B = \frac{182}{200} = 0{,}91$

$\therefore$ m($\angle$B) = 65° 30' 19"

(m($\angle$B) = m($\angle$C) car ABC est un triangle isocèle et les deux angles sont aigus)

On trouve m($\angle$A)

m($\angle$A) = 180° - 2 × (65° 30' 19") $\simeq$ 48° 59' 22"

On utilise la règle de sinus pour trouver la longueur de $\overline{BC}$:

$\therefore \frac{BC}{\sin 48°\,59'\,22"} = \frac{182}{\sin 65°\,30'\,19"}$ $\therefore BC = \frac{182 \times \sin 48°\,59'\,22"}{\sin 65°\,30'\,19"} \simeq 150{,}9 cm$

[1] [8] [2] [×] [sin] [4] [8] [°'"] [5] [9] [°'"] [2] [2] [°'"] [)] [÷]

[sin] [6] [5] [°'"] [3] [0] [°'"] [1] [9] [°'"] [)] [=]

Aire du triangle ABC $= \frac{1}{2} AB \times AC \sin A$

$= \frac{1}{2} \times 182 \times 182 \sin 48°\,59'\,22" \simeq 12497 cm^2$

Essayez de résoudre

(5) ABC est un triangle inscrit dans un cercle tel que AB = AC = 10,3 cm et la longueur du rayon du cercle est 8.4 cm. Calculez:

a) la longueur de la base $\overline{BC}$

b) l'aire du triangle ABC sur la loi des sinus

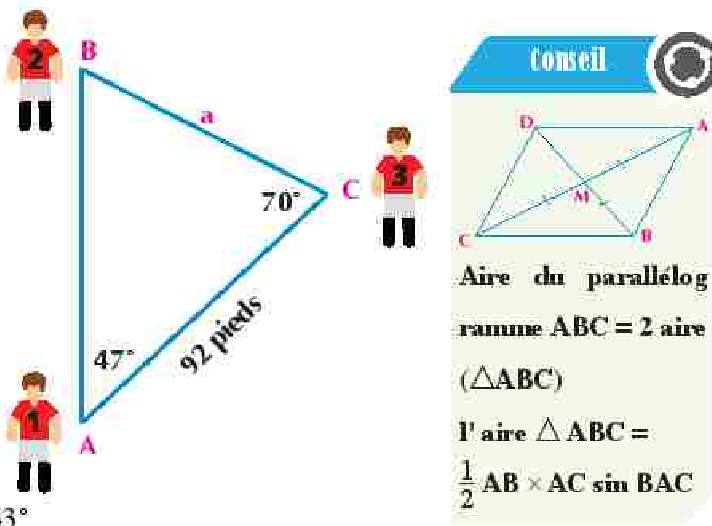
Application de la vie quotidienne sur la règle de sinus

On peut utiliser la règle de sinus pour résoudre beaucoup de problèmes en traçant un triangle, puis on le résout.



Exemple

6 **En lien avec le sport:** La figure ci-contre représente les positions des trois joueurs d'une équipe de football dans un matche. Déterminez la distance entre le deuxième joueur et le troisième joueur à pieds un près.



Solution

$m(\angle B) = 180° - (70° + 47°) = 63°$

La distance entre le deuxième joueur et le troisième joueur est a

$\frac{a}{\sin 47°} = \frac{92}{\sin 63°} \quad \therefore a = \frac{92 \times \sin 47°}{\sin 63°} \simeq 76$ pieds

En utilisant la calculatrice: 9 2 × sin 4 7 (÷ sin 6 3 (=

La distance entre le deuxième joueur et le troisième joueur est environ 76 pieds près

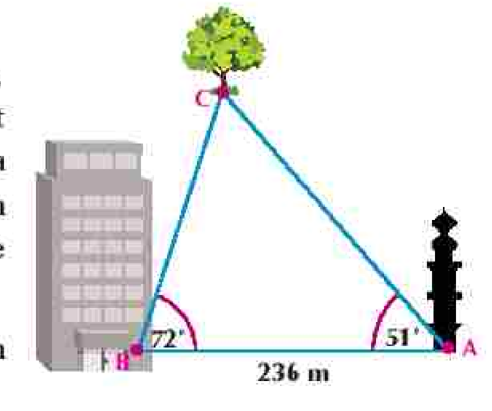
Essayez de résoudre

6 Déterminez la distance entre le premier et le deuxième joueur à un pied près.



Exemple

7 **En lien avec la géographie:** Dans la figure suivante, il y a trois positions géographiques qui représentent un triangle. La distance entre la position A et la position B est 236 km. La distance entre la position A et la position C est 262 km et la mesure de l'angle à la position B est égale à 72°, Déterminez:



a La distance entre la position C et la position B en arrondissant le résultat à une unité près.

b L'aire du terrain triangulaire dont les positions A, B et C sont les sommets en arrondissant le résultat à un mètre carré près.

Solution

a On trouve $m(\angle C)$ dans $\triangle ABC$: $m(\angle C) = 180° - (51° + 72°) = 57°$

On utilise la règle de sinus pour trouver la longueur de $\overline{BC}$:

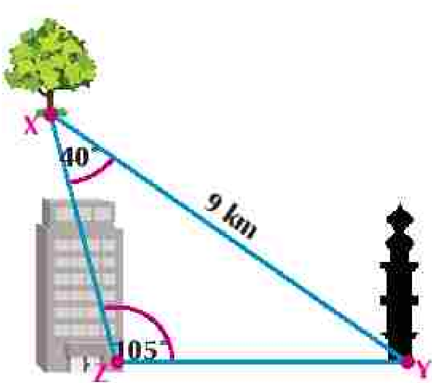
$\because \frac{BC}{\sin A} = \frac{AB}{\sin C}$ (Régle de sinus) $\quad \therefore \frac{BC}{\sin 51°} = \frac{236}{\sin 57°}$

D'où $BC = \frac{236 \times \sin 51°}{\sin 57°} = 218.6871 \simeq 219$ metrez

b L'aire du terrain dont les positions A, B et C sont les sommets du triangle $m(\angle B)$

$\because$ Aire du tringle ABC $= \frac{1}{2}$ a c sin B $= \frac{1}{2} \times 218{,}6871 \times 236 \times \sin 72° \simeq 24542$ m².

Essayez de résoudre



7) Dans la figure suivante, il y a trois positions géographiques qui représentent les sommets d'un triangle. Si la distance entre la position X et la position Y est 9 km et la distance entre la position Y et la position Z est 6 km et la mesure de l'angle en position Z est égale à 105°, Déterminez :

a) La distance entre la position X et la position Z.

b) L'aire du triangle dont les sommets sont les positions X, Y et Z.

Utilisé la règle de sinus dans un triangle pour déterminer les mesures des angles d'un triangle (Il existe deux solutions pour un angle de mesure inconnue)



Activité 1

Tracez le triangle ABC dans lequel ABC b = 7 cm, a = 5cm et m($\angle$A) =30°



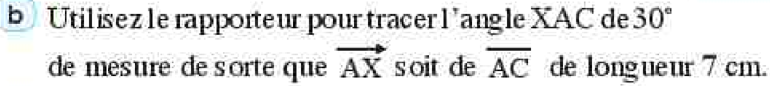
Les instruments utilisés:

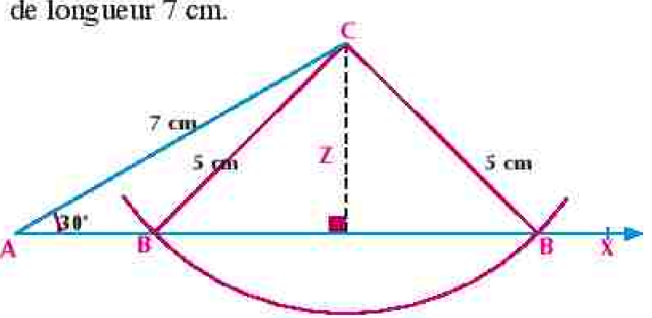
Des feuilles – Un crayon – Une règle – Un compas – Un rapporteur.



a) Du point A tracez $\overrightarrow{AX}$

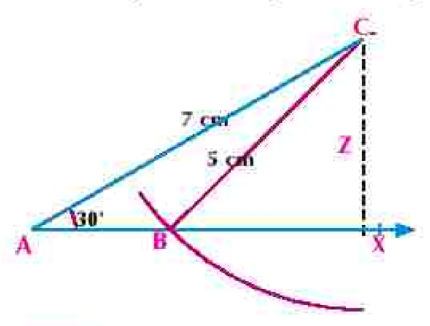
b) Utilisez le rapporteur pour tracer l'angle XAC de 30° de mesure de sorte que $\overrightarrow{AX}$ soit de $\overline{AC}$ de longueur 7 cm.

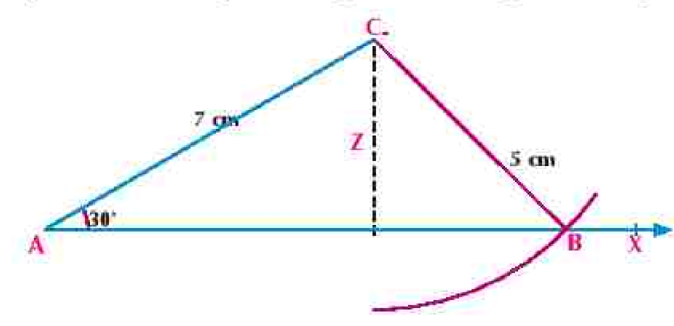




c) Avec une ouverture de 5 cm, mettez la pointe sèche du compas sur le point C puis tracez un arc qui coupe $\overrightarrow{AX}$ en B Que-remarquez vous?

On remarque que l'arc coupe $\overrightarrow{AX}$ en deux points. Cela veut dire qu'il existe deux possibilités pour le triangle ABC, qu'il soit un triangle acutangle ou un triangle obtusangle.





d Comparez entre la longueur de la hauteur (h) du triangle issue du point C ⊥ $\overrightarrow{AX}$ et celle de $\overline{BC}$. Que-remarquez vous?

On remarque que: z = 3,5 cm , BC = 5 cm , AC = 7cm **C'est-à-dire que:** z < a < b

e Peut-on utiliser la règle de sinus pour trouver les mesures des angles du triangle précédent ? Pourquoi?

Pour chercher la possibilité de résolution du triangle ABC: On détermine la distance entre le point C et $\overline{AB}$ soit z. $z = b\sin A$ C'est-à-dire: $z = 7\sin 30 = 3\frac{1}{2}$ cm

Puisque ∠ B est aigu et , z < a < b alors il y a deux valeurs de la mesure de l'angle B l'une pour la mesure de l'angle aigu et l'autre pour la mesure de son supplémentaire. On utilise la règle de sinus comme suivant:

$\frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A}$ C'est-à-dire que : $\frac{7}{\sin B} = \frac{5}{\sin 30}$ d'où : $\sin B = \frac{7 \times \sin 30°}{5} = 0{,}7$

Donc m(∠B) ≃ 44° 25' 37"

Donc la mesure de l'angle supplémentaire ≃ 180° - 44° 25' 37" ≃ 135° 34' 23"

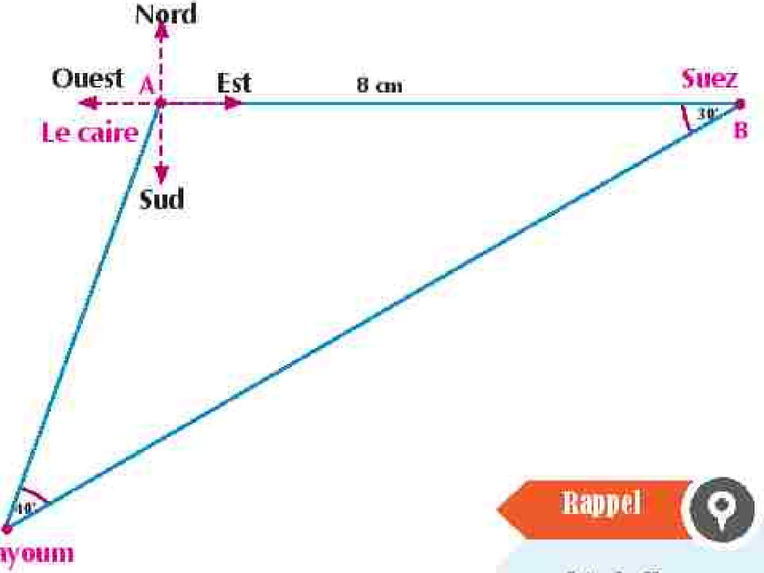
Application sur l'activité : LMN est triangle dans lequel $\ell = 12$ cm , m = 15 cm et m(∠L) 40°. Démontrez qu'il ya deux valeurs possibles de la mesure de l'angle M puis déterminez-les.

Utilisé de la calculatrice pour résoudre des exercices et des activités sur la règle de sinus.



Activité 2

La figure ci-contre représente les positions de trois villes égyptiennes. Si la distance entre le Suez et le Caire est 8 cm, la mesure de l'angle dont le sommet est Suez est 30° et la mesure de l'angle dont le sommet est Fayoum est 40°. Sachant que 1cm sur le dessin représente 16,75 km en réalité.



a Peut-on trouver m(∠A)?

m(∠A) = 180° - (30° + 40°) = 110°

[1] [8] [0] [-] [(] [3] [0] [+] [4] [0] [)] [=]

b Comment peut-on trouver la distance entre le Caire et Suez ?

La longueur réelle = la longueur sur le dessin : l'échelle

$AB = 8 \div \frac{1}{16{,}75} = 134$ km.

[8] [÷] [(] [1] [÷] [1] [6] [.] [7] [5] [)] [=]

Rappel

L'echelle = $\frac{\text{longueur sur le dessin}}{\text{Longueur réelle}}$

Longueur réelle = $\frac{\text{longueur sur le dessin}}{\text{Echelle}}$

Longueur sur le dessin = Longueur réelle × Echelle

c Comment peut-on trouver la distance entre le Caire et Fayoum ?

On utilise la règle de sinus comme suivant : $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

C'est-à-dire que: $\frac{b}{\sin 30^\circ} = \frac{134}{\sin 40^\circ}$ d'où $b = \frac{134 \times \sin 30^\circ}{\sin 40^\circ} \simeq$ 104km.

1 3 4 × sin 3 0 (÷ sin 4 0) =

d Peut-on utiliser la mesure précise pour trouver la distance entre le Caire et Fayoum?

Du dessin on trouve que : AC $\simeq$ 6.2 cm Donc la distance réelle $\simeq 6.2 \div \frac{1}{16.75} \simeq$ 104km.

Application sur l'activité: Dans l'activité précèdent utilisez la règle de sinus pour vérifier le résultat.

Exercices (4 - 1)

Complétez :

1. Dans un triangle, les longueurs des côtés sont proportionnels aux ....
2. ABC La longueur du côté d'un triangle équilatéral est de $10\sqrt{2}$ cm, alors la longueur du rayon du cercle passant par les sommets de ce triangle est égale à ....
3. ABC est un triangle tel que X($\angle$A) = 60°, m($\angle$C) = 40°, c = 8.4 cm alors a = ... cm
4. Dans le triangle ABC, on a $\frac{2\,b}{\sin B}$ = ... r
5. La longueur du diamètre d'un cercle passant par les sommets d'un triangle acutangle ABC est 20 cm BC = 10 cm, alors m($\angle$A) = ... °
6. L'aire du triangle équilatéral dont la longueur du coté est 6 cm est égale à ....

Choisissez la bonne réponse .

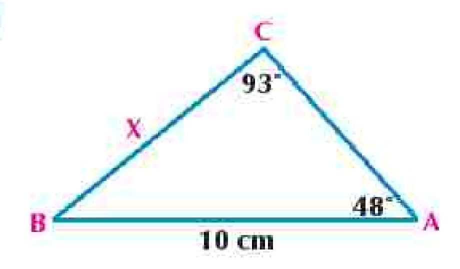
7. La longueur du rayon du cercle circonscrit au triangle ABC tel que m($\angle$A) = 30° et a = 10cm est ....
   a 10cm b 20cm c 5cm d 40cm
8. Si la longueur du rayon du cercle circonscrit au triangle ABC est 4 cm et m($\angle$A) = 30° alors a ....
   a 4cm b 2cm c $4\sqrt{3}$ d $\frac{1}{16}$
9. Dans le triangle ABC; l'expression 2r sin A = ...
   a a b b c c d A($\triangle$ABC)
10. Si r est la longueur du rayon du cercle circonscrit au triangle XYZ, alors alors $\frac{y}{\sin Y}$ est égale à ....
   a r b 2 r c $\frac{1}{2}$r d 4 r
11. LMN est un triangle tel que m(L) = 30°, MN = 7cm, alors la longueur du rayon du cercle circonscrit au triangle est égale à:
   a 7cm b 3.5cm c 14cm d $\frac{14}{\sqrt{3}}$

12) Dans le triangle XYZ si $3 \sin X = 4 \sin Y = 2 \sin Z$ alors $x : y : Z$ est égale à

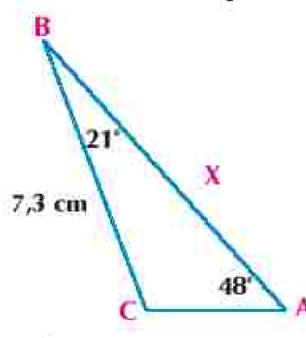
a) 2 : 3 : 4 b) 6 : 4 : 3 c) 3 : 4 : 6 d) 4 : 3 : 6

13) En utilisant la loi des sinus, déterminez la longueur de x à un décimale près.

a)



b)



Résolvez le triangle ABC dans chacun des cas suivants:

14) $m(\angle A) = 75°$, $m(\angle B) = 34°$, $a = 10.2$cm

15) $m(\angle A) = 19°$, $m(\angle C) = 105°$, $c = 11.1$cm

16) $m(\angle A) = 116°$, $m(\angle C) = 18°$, $a = 17$cm

17) $m(\angle A) = 36°$, $m(\angle B) = 77°$, $b = 2.5$cm

18) $X(\angle A) = 49° \ 11'$, $m(\angle B) = 67° \ 17'$, $c = 11.22$cm

19) $X(\angle B) = 115° \ 4'$, $m(\angle C) = 11° \ 17'$, $c = 516.2$cm

Déterminez la longueur du diamètre du cercle circonscrit au triangle ABC dans chacun des cas suivants :

20) $m(\angle A) = 75°$, $a = 21$cm

21) $m(\angle B) = 50°$, $b = 90$cm

22) $m(\angle C) = 102°$, $c = 11$cm

23) $m(\angle A) = 70°$, $a = 8.5$cm



Activité (24, 25; 26)

Dans chacun des cas suivants, déterminez les mesures des angles B et C du triangle ABC pour vérifier les conditions données. Tracez des figures pour vous aider à déterminer s'il y a une ou deux Solution(s).

24) $m(\angle A) = 62°$, $a = 30$cm, $b = 32$cm

25) $m(\angle B) = 48°$, $a = 93$ cm, $b = 125$cm

26) $m(\angle A) = 23.6°$, $a = 9.8$cm, $b = 17$cm

27) ABC est un triangle tel que $m(\angle A) = 67° \ 22'$, $m(\angle C) = 44° \ 33'$ et $b = 100$ cm. Trouvez le périmètre et l'aire du triangle ABC.

28) Dans le triangle XYZ $y = 68.4$cm, $m(\angle Y) = 100°$, $m(\angle Z) = 40°$, trouvez x et longueur du rayon circonscrit au triangle XYZ puis déterminez l'aire du triangle.

29) Si le périmètre du triangle ABC est 30cm $X(\angle A) = 22° \ 37'$, $m(\angle B) = 67° \ 23'$, calculez a et b à un cm près.

30) Si le périmètre du triangle ABC est 450 cm, $m(\angle B) = 82°$, $m(\angle C) = 56°$, trouvez la valeur de a

(31) ABCD est un parallélogramme dans lequel AB = 18.6 cm, m(∠CAB) = 22' 36°, m(∠D B A) = 38' 44°, Calculez les longueurs de $\overline{AC}$ et l'aire du parallélogramme.

(32) ABCD est un trapèze où $\overline{AD}$ // $\overline{BC}$, CE = 22.3cm, m(∠D) = 115°, m(∠A CB) = 15'32°, m(∠B) = 66°, Calculez les longueurs de $\overline{AC}$ et de $\overline{CB}$.

(33) La longueur d`un côté d'un pentagone régulier ABCDE est 18,26 cm. Calculez la longueur de la diagonale $\overline{AC}$.

(34) Dans un cercle, les longueurs deux cordes $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ sont 43.5cm, 52.1cm, respectivement et elles sont de part et d'autre part du diamètre $\overline{AD}$ dont la longueur est 100 cm. Calculez :

a X(∠BAC) b la longueur du $\overline{BC}$

(35) ABCD est un quadrilatère tel que X(∠BCD) = 85°, m(∠CD A) = 87°, m(∠B C A) = 36°, m(∠BDA) = 55°, CD = 100cm , Calculez les longueurs de BD et de AC $\overline{BD}$, $\overline{AC}$

(36) ABC est un triangle, tel que a = 58 cm, m(∠B) = 38°, m(∠C) = 62° , Calculez la distance entre le point A et la droite $\overline{BC}$.

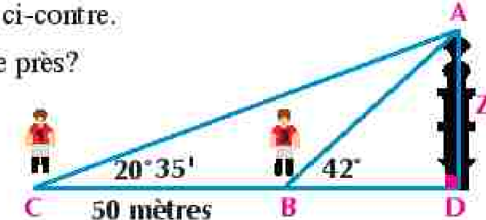
(37) Un terrain sous la forme d'un triangle ABC tel que a = 90 m, m(∠B) = 53° 8' , m(∠A) = 64° 9' , Déterminez son périmètre et l'aire de ce terrain.

Réflexion créatif:

(38) **En lien avec la géographie :** Deux phares sont situé sur une même ligne droite du nord au sud et la distance entre eux 20 km. Un bateau se déplace du point C tel que m(∠ACB) = 33° et le gardien de phare est situé en B tel que m(∠ABC) = 52°, Déterminez la distance entre le bateau et chacun de deux phares.

(39) **En lien avec l'escalade :** Adel et Karim sont en face d'un mur de roche, ils veulent le grimper et la distance entre eux est de 8 mètres, comme indiqué dans la figure ci-contre. Quelle est la hauteur du mur de roche à un dixième près?

(40) Ahmed et Salah sont debout juste en face d'un minaret. La distance entre eux est 50 mètres, comme indiqué dans la figure ci-contre. Quelle est la hauteur du minaret à un dixième de mètre près ?

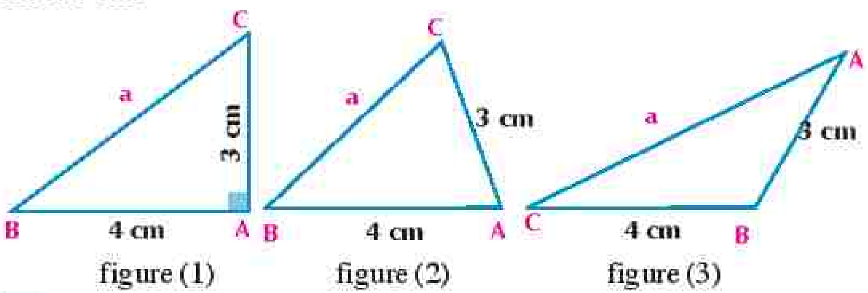


4 - 2 Loi de cosinus



Réfléchissez et discutez

Chacun des triangles suivants dont les longueurs de deux côtés sont 3 cm et 4 cm.

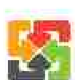


a. Dans la figure (1), m(∠A) droit, trouvez a.

b. Quelles sont les valeurs possible de "a" dans le cas où ∠A est aigu? (figure 2)

c. Quelles sont les valeurs de "a" dans le cas où ∠A est obtus? (figure 3)

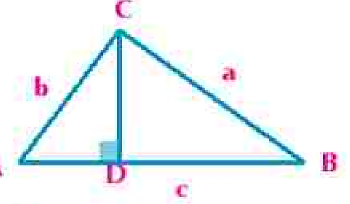
d. dans les deux figures (2) et (3) Est-ce qu'on peut résoudre le triangle étant donné (∠A) en utilisant la loi des sinus? Expliquer votre réponse. La loi (la règle) des cosinus nous aide à résoudre ces triangles.



A apprendre

Loi (règle) de cosinus

Dans la figure ci-contre: $\overline{CD} \perp \overline{AB}$



Dans le triangle BDC:

$(BC)^2 = (CD)^2 + (BD)^2$ **(Théorème de Pythagore)**

$(BC)^2 = (CD)^2 + (AB - AD)^2$ En développant

$= (CD)^2 + (AD)^2 + (AB)^2 - 2AB.AD$

$= (AC)^2 + (AB)^2 - 2AB.AD$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc \cos A$



Réfléchissez: Trouvez b^2 et c^2 en fonction de a , b , c et les mesure des angles du △ ABC.

Remarque

$(AC)^2 = (AD)^2 + (CD)^2$
AD = AC cos A



Allez apprendre

- Lois de cosinus dans un triangle.
- Utilisation de la loi de cosinus pour résoudre un triangle.
- Modéliser et résoudre des problèmes quotidiens utilisant la loi de cosinus.



Vocabulaires de base

- Loi de cosinus
- Angle aigu
- Angle obtus
- Angle droit

Aides pédagogiques

- Calculatrice lettre

Formule de la règle de cosinus : Dans un triangle ABC, on a:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2\ bc \cos A$, $b^2 = c^2 + a^2 - 2\ c\ a \cos B$

, $c^2 = a^2 + b^2 - 2\ a\ b \cos C$

Pensé critique:

1. Démontrez la règle de cosinus dans le cas où le triangle ABC est obtusangle.
2. La règle de cosinus est-elle vraie dans le cas du triangle rectangle ? Justifier votre réponse.



Activité 3

Cherchez dans la bibliothèque de votre école ou en utilisant l'internet pour des autres démonstrations de la loi des cosinus. Les Discuter avec votre professeur.

Déterminé la longueur d'un coté de longueur inconnue d'un triangle

Exemple

1. XYZ est un triangle tel que $x = 24.3$ cm et $y = 22.8$ cm , $m(\angle Z) = 42°$ Calculez z en arrondissant le résultat à un décimal près.

Solution

En appliquant loi des cosinus

$z'^2 = x^2 + y^2 - 2x\ y \cos Z$

$= (24.3)^2 + (22.8)^2 - 2 \times 24.3 \times 22.8 \cos 42° \simeq 286.87$

$z \simeq 16.9$ cm

Cela en utilisant la calculatrice comme suit:

2 4 . 3 x^2 + 2 2 . 8 x^2 − 2 × 2 4 . 3 × 2 2 . 8 cos 4 2 = √ ANS =

Essayez de résoudre

1. ABC est un triangle tel que $a = 72.8$ cm , $b = 58.4$ cm et $m(\angle C) = 64.8°$ Calculez c

Trouvé la mesure d'un angle d'un triangle en connaissant ses trois côtés

Vous avez déjà appris que :

$a^2 = b^2 + c^2 - 2\ bc \cos A$ (Règle de cosinus)

$2b\ c \cos A = b^2 + c^2 - a^2$

C'est-à-dire que : $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ (Divisant par 2bc)

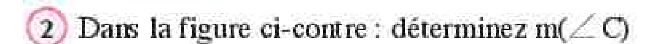
On peut également déduire:

$\cos B = \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$, $\cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2\ ab}$

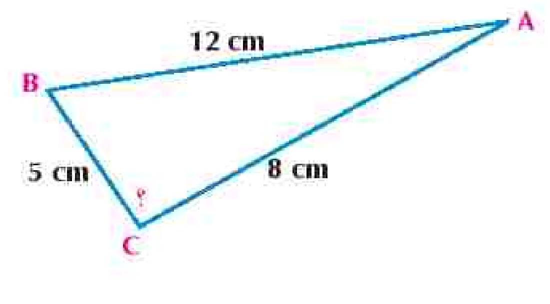
Utilisé la loi de cosinus dans un triangle pour trouver la mesure d'un angle.



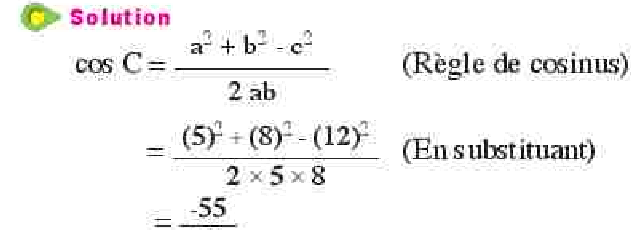
Exemple



(2) Dans la figure ci-contre : déterminez m(∠C)



Solution



$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2\,ab} \quad \text{(Règle de cosinus)}$$

$$= \frac{(5)^2 + (8)^2 - (12)^2}{2 \times 5 \times 8} \quad \text{(En substituant)}$$

$$= \frac{-55}{80}$$

Cela en utilisant une calculatrice

5 x^2 + 8 x^2 − 12 x^2 ÷) 2 × 5 × 8 (=

SHIFT cos = ..

On remarque que cosinus l'angle est négative, alors ∠C est obtus, on a donc

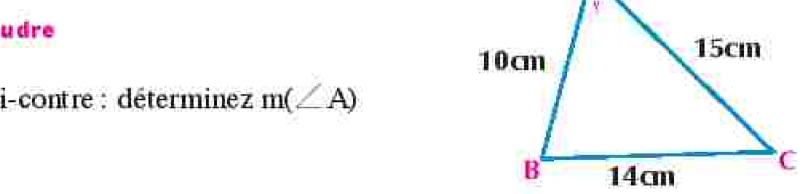
m(∠C) ≃ 133° 25' 57''



Essayez de résoudre



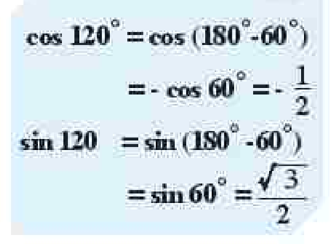
(2) Dans la figure ci-contre : déterminez m(∠A)



Exemple

(3) Calculez la mesure du plus grand angle du triangle LMN tel que $\ell = 7{,}5$ cm ; m = 12,5 cm et n = 17,5 cm, puis démontrez qu'il vérifie la relation:

$\cos N - 3\sqrt{3}\,\sin N + 5 = 0$



Rappel

$\cos 120° = \cos(180° - 60°)$

$= -\cos 60° = -\frac{1}{2}$

$\sin 120 = \sin(180° - 60°)$

$= \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$



Solution

Le plus grand angle est opposé au plus long côté, alors ∠ N est celui le grand angle du triangle

D'où : $\cos N = \frac{\ell^2 + m^2 - n^2}{2\,\ell\,m} = \frac{(7{,}5)^2 + (12{,}5)^2 - (17{,}5)^2}{2 \times 7{,}5 \times 12{,}5} = -\frac{1}{2}$

$\therefore \cos N = -\frac{1}{2}$ $\qquad \therefore$ m(∠N) = 120°



7 . 5 x^2 + 1 2 . 5 x^2 − 1 7 . 5 x^2 = ÷) 2 × 7 . 5 × 1 2 . 5 (=

SHIFT cos ANS (= ..

Membre de gauche = $\cos N - 3\sqrt{3}\,\sin N + 5 = \cos 120° - 3\sqrt{3}\sin 120° + 5$

$= -\frac{1}{2} - 3\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 5 = 0 =$ Membre de droite.

Essayez de résoudre

(3) ABC est un triangle tel que a = 12 cm , b = 15cm , c = 18 cm Démontrer que m(∠C) = 2 m(∠A)

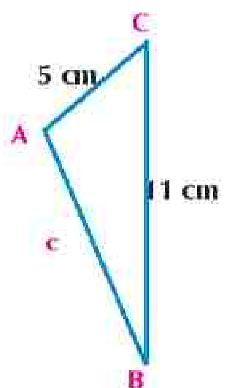
Utilisé la loi de cosinus pour résoudre un triangle

La loi de cosinus nous permet de résoudre un triangle en connaissant les longueurs de deux côtés et la mesure de l'angle compris entre eux.

Résolution d'un triangle en connaissant les longueurs de deux côtés et la mesure de l'angle compris entre eux :



Exemple





Rappel

Resoudre un triangle veut dire determiner les éléments inconnus Dans ce cas, on veut déterminet c , m(∠A) , m(∠B)

(4) Résoudre le triangle ABC tel que $a = 11cm$, $b = 5cm$, $m(\angle C) = 20°$

Solution

Il faut calculer c $m(\angle A)$; $m(\angle B)$

$\because\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$ (loi de cosinus)

$\therefore\ c^2 = (11)^2 + (5)^2 - 2 \times 11 \times 5 \cos 20°$

$\therefore\ c = \sqrt{(11)^2+(5)^2 - 2 \times 11 \times 5 \cos 20}$

$\simeq 6.529cm$







$\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

$= \dfrac{(5)^2 + (6.529)^2 - (11)^2}{2 \times 5 \times 6.529} \simeq -0.817$

$\therefore\ m(\angle A) \simeq 144.786°$

$m(\angle B) = 180° - [m(\angle A) + m(\angle C)]$

$= 180° - [144.786° + 20°]$

$= 15.214°$

$\therefore\ c = 6.529cm$, $m(\angle A) = 144° 47' 96''$

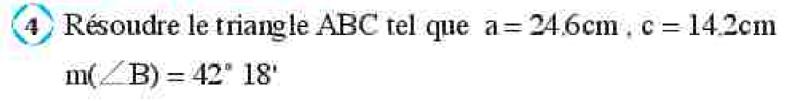
$m(\angle B) \simeq 15° 12' 50''$



Information importante

pour trouver la mesure d'un angle dans un triangle etant donné les longueurs de deux côtés et l'angle compris entre les deux côtes, il est préférabl d'utiliser la lois de cosinus au lieu de la lois de cosinus.

La sinus d'un angle aigu ou obtus est tojours positive tandis que la cosinus d'angle obtus est tojours positive tandis que la cosinus d'un angle obtus est négative



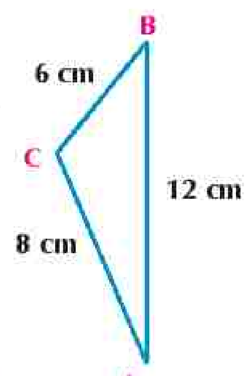
Essayez de résoudre

(4) Résoudre le triangle ABC tel que $a = 24.6cm$, $c = 14.2cm$, $m(\angle B) = 42° 18'$

Résolution d'un triangle en connaissant les longueurs de ses trois côtés



Exemple



(5) Résoudre le triangle ABC dans lequel a = 6cm , b = 8cm , c = 12cm

Solution

La conclusion : Déterminez les mesures des trois angles du triangle

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,b\,c} = \frac{(8)^2 + (12)^2 - (6)^2}{2 \times 8 \times 12} = \frac{43}{48}$$

$\therefore$ m $(\angle A) \simeq 26^\circ\ 23'\ 4''$

8 x^2 + 1 2 x^2 − 6 x^2 = ÷ (2 × 8 × 1 2) = SHIFT cos ANS (=

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2\,ca} = \frac{(12)^2 + (6)^2 - (8)^2}{2 \times 12 \times 6} = \frac{29}{36}$$

$\therefore$ m $(\angle B) \simeq 36^\circ\ 20'\ 10''$

$\therefore$ m $(\angle C) = 180^\circ - [26^\circ\ 23'\ 4'' + 36^\circ\ 20'\ 10'']$

$= 117^\circ\ 16'\ 46''$

Essayez de résoudre

(5) Résoudre le triangle ABC tel que a = 12,2 cm ; b = 18,4cm ; C ' = 21,1 cm

L'écriture en mathématiques:

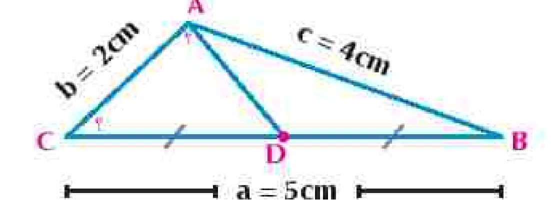
On suppose que tu connais les mesures des angles d'un triangle, est-ce que tu peux utiliser la loi des sinus ou la loi des cosinus pour Calculez la longueur d'un côté ? Expliquer ta réponse.

Applications géométriques sur la loi des cosinus

Exemple

(6) ABC est un triangle dans lequel a = 5 cm , b = 2 cm et c = 4 cm , On trace D est le milieu de $\overline{BC}$ Calculez m($\angle$C) , m($\angle$ CAD)

Solution



Dans le triangle ABC

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2\,a\,b}$$

$$= \frac{(5)^2 + (2)^2 - (4)^2}{2 \times 5 \times 2} = \frac{13}{20}$$

$\therefore$ m $(\angle C) \simeq 49^\circ\ 27'\ 30''$

5 x^2 + 2 x^2 − 4 x^2 = ÷ (2 × 5 × 2) = SHIFT cos ANS =

Dans le triangle ADC

$(AD)^2 = (DC)^2 + (AC)^2 - 2\,DC \times AC \cos C$

$= (\frac{5}{2})^2 + (2)^2 - 2 \times \frac{5}{2} \times 2 \cos 30°27'49''$

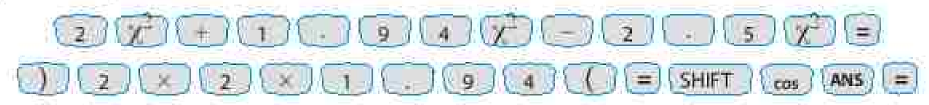
$\simeq 3.7499$

$\therefore AD \simeq 1.94$ cm

$\because \cos(\angle CAD) = \frac{(AC)^2 + (AD)^2 - (CD)^2}{2 \times AC \times AD}$

$= \frac{(2)^2 + (1.94)^2 - (2.5)^2}{2 \times 2 \times 1.94} \simeq 0.1951$

$\therefore m(\angle CAD) \simeq 78°\ 14'\ 14''$



Exemple

(7) **Enbienaveclagéométrie:** ABCD est un quadrilatère tel que AB=9 cm, BC = 5 cm , CD = 8 cm, DA= 9cm, AC= 11cm, Démontrez que le quadrilatère ABCD est inscriptible.

Solution

Dans le triangle ABC

$\cos B = \frac{(9)^2 + (5)^2 - (11)^2}{2 \times 9 \times 5} = -\frac{1}{6}$

Dans le triangle ADC

$\cos E = \frac{(9)^2 + (8)^2 - (11)^2}{2 \times 9 \times 8} = \frac{1}{6}$

C'est-à-dire que $\cos D = -\cos B$

D'où $m(\angle D) + m(\angle B) = 180°$

Puisque $\angle D$ et $\angle B$ sont deux angles opposés et supplémentaires dans le quadrilatère ABCD

$\therefore$ ABCD est un quadrilatère inscriptible. (ce qu' il faut démontrer)

A
9 cm
D
11 cm
9 cm
8 cm
C
5 cm
B

Rappel 

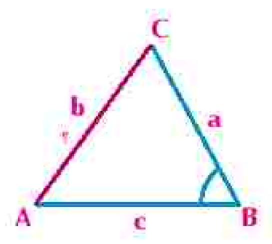
Le quadrilatére inscriptible est un polygone dont les sommets appartiennent au même cercle (cocycliques) un quadrilatére est inscriptible si il a:

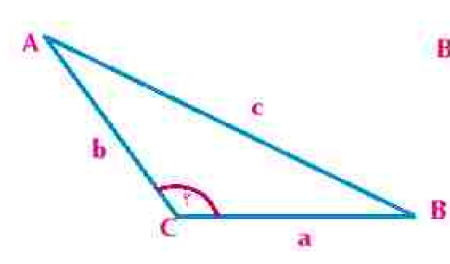
- **Deux angles opposés sont supplémentaires.**
- **La mesure de l'angle exterieur en un sommet est égale à la mesure de l'angle apposé à son adjacent.**
- **deux angles situés sur une même base et de même côté de cette base ont la même mesure**
- **Les sommets sont équidistent d'un point fixe**

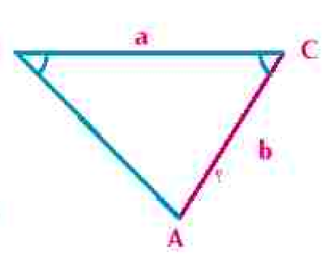
Essayez de résoudre

(6) ABCD est un quadrilatère tel que AB = 2.7cm , AC = 7.2 cm, BC = 6.3cm, CD = 4.5cm , BD = 7.2cm. Démontrez que le quadrilatère ABCD est inscriptible.

Discussion : En utilisant les données en bleues seulement sur chaque triangle, écrivez la formule de la loi des sinus ou la loi des cosinus pour calculer les lettres inconnue en rouges.





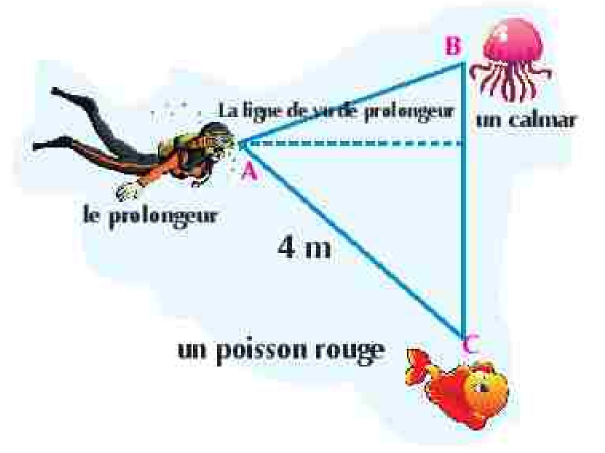


Applications de la vie courante sur la loi de cosinus



Exemple

8 En lien avec le sport et le tourisme:



Dans la figure ci-contre Un touriste amateur du sport de plongeon dans l'eau de la Mer Rouge pour regarder les rares récifs de corail et les poissons colorés. Une fois de plongeon, quand il a regardé vers le haut d'un angle de mesure 20°, il a vu un calmar qui lui est éloigné d'une de distance de 3 mètres. Quand il a regardé vers le bas d'un angle 40° , il a vu un poisson rouge qui lui est éloigné d'une distance de 4 mètres. Quelle est la distance entre le calmar et le poisson rouge?

Solution

D'après la figure ci-contre, on connait les longueurs des deux côtés d'un triangle et la mesure de l'angle compris entre eux, pour cela, on peut utiliser la loi des cosinus comme suivant

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$
$$= (4)^2 + (3)^2 - 2 \times 4 \times 3 \cos 60°$$
$$= 13$$
$$\therefore \ a \simeq 3.6 \text{ m}$$

Alors la distance entre le calmar et le poisson rouge est égale à peu près 3,6 m

Essayez de résoudre

7 En lien avec le sport : Hani est un amateur du cyclisme, il roule une distance de 6 km d'un point A à un point B , ensuite il a roulé une distance de 7 km. du point B au point C de telle sorte que m($\angle$ ABC) = 79°. Quelle est la distance, à un km près entre les deux points A et C

 **Exemple**

(9) **En lien avec le sport :** Dans un match de football, le joueur du milieu de terrain se trouvant à 20 mètres l'ailier droite. Quand il a tourné d' un angle de mesure 40° il a vu l'ailier gauche se trouve à16 mètres. Quelle est la distance entre les deux ailiers ? (en arrondissant le résultat à deux décimales près)

Solution

Tracez une figure pour représenter la situation,

Dans le triangle ABC, la distance AB = c

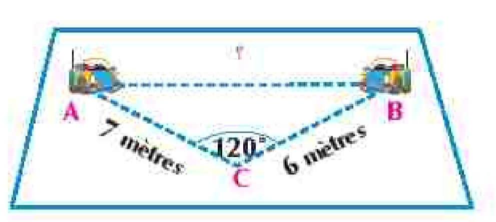
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

$= (16)^2 + (20)^2 - 2 \times 16 \times 20 \cos 40° \simeq 12.87$ mètres

La distance entre les deux joueurs de l'ail est 12,87 mètres environs

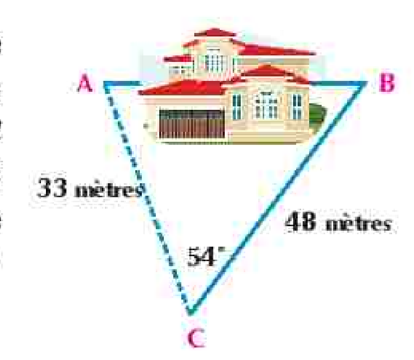
Essayez de résoudre

(8) **Jeux:** Dans une station de jeux des voitures électroniques dans la ville d'attraction, comme dans la figure ci-contre. Quelle est la distance entre les deux voitures A et B avant qu'elles se heurtent?



Exemple **Mesure indirecte de distance**

(10) Dans la figure ci-contre : Chadi voulait mesurer la distance entre les deux points A et B qui se trouvent dans deux côtés différents d'un bâtiment. Si Chadi se trouve à la position C dont la distance de A est 33 m. et la distance de B est 48 mètres et m(∠C) = 54°, comme il est indiqué dans la figure ci-contre. Déterminez la distance AB (à deux décimales près).



Solution

Dans le triangle ABC : Si la distance AB = c

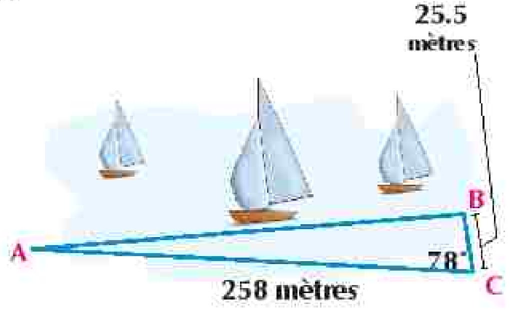
$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab \cos C$

$= (48)^2 + (33)^2 - 2 \times 48 \times 33 \cos 54° \simeq 1530.8963$

$c \simeq 39{,}13$ mètres



(9) **Calcule de distances** Sanaa voulait mesurer la distance entre le point A et le point B qui se trouvent au bord du lac. Elle a pris la position C qui se trouve à une distance 258 m du point A et à une distance 25,5 m au point B. Elle a mesuré ∠C elle l'a trouvée 78°, Calculez la longueur de $\overline{AB}$ (à deux décimales près)





Complétez ce qui suit:

1. Dans un triangle XYZ, on a: $x^2 = y^2 + z^2$ ...., cos X = $\frac{y^2 + z^2}{.........}$

2. Si les longueurs des côtés d'un triangle sont 13, 17 et 15 cm, alors la mesure de plus grand angle est .... cm

3. Si les longueurs des côtés d'un triangle sont 5,7 cm, 7,5 cm et 4,2 cm, alors la mesure de plus petit angle est ....

4. ABC est un triangle tel que a = 10 cm, b = 6 cm et m(∠C) = 60° alors C = ...

5. Dans un triangle LMN, on a $m^2 + n^2 - \ell^2 =$ ....

Choisissez la bonne réponse des réponses proposées:

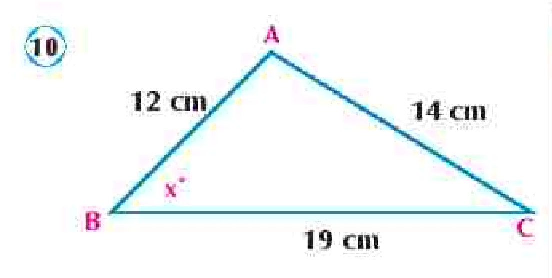
6. La mesure du plus grand angle d'un triangle dont les longueurs des côtés sont 3, 5 et 7 est ....
   a) 150° b) 120° c) 60° d) 30°

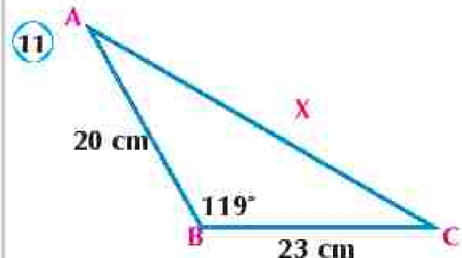
7. Dans un triangle LMN, l'expression $\frac{\ell^2 + m^2 - n^2}{2\,\ell m}$ est égale à:
   a) sin L b) cos M c) cos N d) sin N

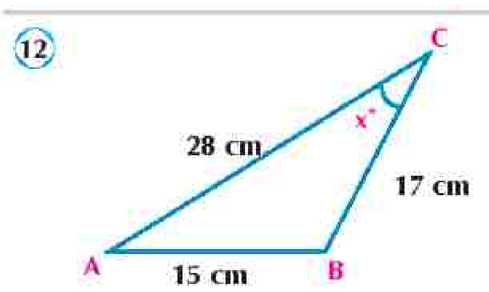
8. Dans un triangle XYZ on a $y^2 + z^2 - x^2 = 2yz$ ....
   a) cos X b) sin Z c) cos Z d) sin X

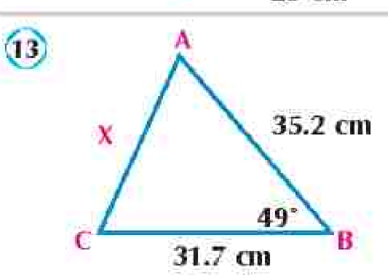
9. Dans un triangle ABC si a : b : c = 3 :2 : 2 alors cos A =
   a) $\frac{1}{2}$ b) $-\frac{1}{8}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{3}{4}$

Utilisez loi des cosinus pour calculez la valeur de x à un dixième près.

10.


11.


12.


13.


Dans un triangle ABC, si:

14 $a = 5$, $b = 7$ et $c = 8$, démontrez que $m(\angle B) = 60°$

15 $a = 3$, $b = 5$ et $c = 7$, démontrez que $m(\angle C) = 120°$

16 $a = 13$, $b = 7$ et $c = 13$, calculez $m(\angle C)$

17 $a = 13$, $b = 8$ et $c = 7$, calculez $m(\angle A)$

18 $a = 10$, $b = 17$ et $c = 21$, calculez la mesure du plus petit angle du triangle.

19 $a = 5$, $b = 6$ et $c = 7$, calculez la mesure du plus petit angle du triangle.

20 $a = 17$, $b = 11$ et $m(\angle C) = 42°$, calculez c à deux décimales près.

21 $b = 16$ cm, $c = 14$ cm, $m(\angle A) = 72°$, calculez a à deux décimales près.

22 ABC est un triangle telque $a = 3$cm, $b = 5$cm, $c = \sqrt{19}$ cm trouvez :

a $m(\angle C)$ b aire du triangle ABC

23 ABC est un triangle tel que $a = 9$ cm ; $b = 15$ cm et $c = 21$ cm. Calculez la mesure du plus grand angle du triangle, puis démontrer qu'il vérifie cette relation cosc $c - 5\sqrt{3}$ $\sin c + 8 = 0$

24 ABCD est un quadrilatère tel que AB = 3 cm, AC = 8 cm, BC = 7 cm, CD = 5 cm et BD = 8 cm. Prouvez que ABCD est un quadrilatère inscriptible.

25 ABCD est un quadrilatère tel que AB = 15 cm, BC = 20 cm, CD = 16 cm, AC = 25 cm et $m(\angle ACD) = 36° 52'$. Calculez longueur du $\overline{AD}$ à un cm près. Puis déterminez l'aire du quadrilatère ABCD.

26 ABCD est un parallélogramme dans lequel AB = 12 cm, BC = 10 cm et la longueur du diagonale $\overline{BD}$ est égale à 14 cm. Calculez la longueur du diagonale $\overline{AC}$ à un cm près.

27 ABCD est un quadrilatère ayant BC = 78 cm, CD = 96 cm, $m(\angle BCD) = 97°$, $m(\angle ABD) = 72°$, $m(\angle ADB) = 43°$. Calculez la longueur de $\overline{AB}$.

28 ABC est un triangle tel que AB = 16 cm ,AC = 24 cm et $m(\angle A) = 80°$,Calculez la longueur de $\overline{BC}$. Si $\overline{AD}$ est une bissectrice intérieure de $\angle$ A et coupe $\overline{BC}$ en D, trouvez la longueur du $\overline{AD}$

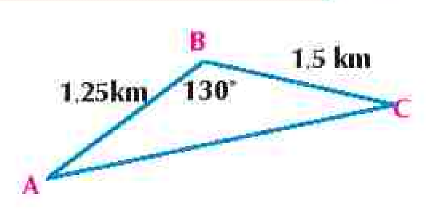
29 **En lien avec le sport :** Le champ de course sous la forme d'un triangle dont les longueurs des côtés sont 1,2 km ; 2 km et 1,8 km. Déterminez la mesure de chacun de ses angles.

1,2km
1,8km
2 km

30 **Superficie des terrains :** Un terrain sous la forme d'un triangle dont les longueurs des côtés sont 300 m ; 210 m et 140 m. En utilisant la loi des cosinus, Calculez l'aire du terrain à un mètre carré près.

140 m
210 m
300 m

31 **En lien avec le sport :** Karim joue avec son vélo. Il se déplace du point A au point B, puis au point C à une vitesse 28 km/h, puis il est revenu du point C au point A directement à une vitesse 35 km / h. Combien de minutes faut-il pour faire ce parcours ? (donnez un résultat approché à un dixième près).



32 **L'écriture en mathématiques :** Comparer entre les cas dont on utilise la loi des sinus pour résoudre un triangle et celui dont on utilise la loi des cosinus

33 **Décelez l'erreur :** ABC est un triangle dans lequel : a = 5 cm , b = 10 cm , c = 7 cm et $m(\angle A) = 27.66°$ trouver $m(\angle B)$:

Solution de Ziad

$\because \frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A}$

$\therefore \frac{10}{\sin B} = \frac{7}{\sin 27.66°}$

$\therefore \sin B = \frac{10 \sin 27.66°}{5} \simeq 0.9488$

$\therefore m(\angle B) \simeq 68.19°$

Solution de Karim

$\because \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$

$\therefore \cos B = \frac{(7)^2 + (5)^2 - (10)^2}{2 \times 7 \times 5} \simeq -0.3714$

$\therefore m(\angle B) \simeq 111.8°$

Réflexion créative

34 Les longueurs de deux cotés d'un triangle sont $(\sqrt{10} + 2)$ et $(\sqrt{10} - 2)$ et la mesure de l'angle compris entre eux est égale à 60°. Trouvez la longueur du troisième coté .

35 ABC est un triangle dans lequel $p - a = 8$ cm, $p - b = 6$ cm et $p - c = 4$ cm où $2p = a + b + c$. Trouvez la mesure du plus grand angle du triangle.

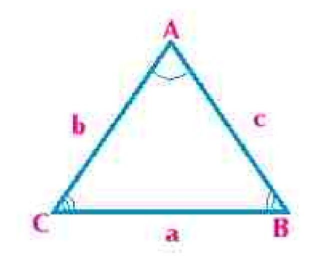
36 ABC est un triangle dans lequel $p - a = 26$ cm, $b = 28$ cm et $p + a = 98$ cm où 2p est le périmètre du triangle. Trouvez les longueurs des côtés du triangle et la mesure du plus petit angle du triangle.

37 Si le rapport entre les sinus des mesures des angles d'un triangle est 4 : 5 : 6 ; trouvez le rapport entre les cosinus des angles de ce triangle.

38 Dans le triangle XYZ si $y^2 = (z - x)^2 + zx$, démontrez que $m(\angle Y) = 60°$

Résumé de l'unité

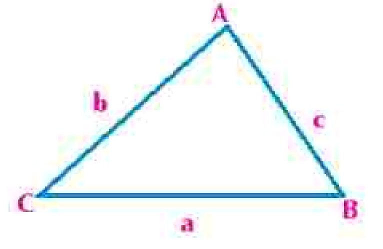
1 Un triangle a six éléments : trois côtés et trois angles. .



2 Résoudre un triangle consiste à trouver les éléments inconnus en fonction des éléments donnés, dans cette unité on a utilisé les lois des sinus et des cosinus avec la calculatrice scientifique pour résoudre un triangle et pour résoudre des applications géométriques et de la vie courantes.

3 **Loi (règle) de sinus :** Dans tout triangle, les longueurs des côtés sont proportionnelles aux sinus des angles opposés.

Donc dans un triangle ABC, on a $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$



- Nous pouvons utiliser cette loi pour résoudre le triangle dans les cas où on connait la longueur d'un côté et les mesures de deux angles.

4 Donc dans un triangle ABC, on a

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2\ r$$

- Où r est le rayon du cercle circonscrit au triangle.

5 **Loi de cosinus :**

- Dans tout triangle ABC, on a :

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ on en déduit que $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\ bc}$

$b^2 = c^2 + a^2 - 2ba \cos B$ on en déduit que $\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$ on en déduit que $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

5 **Utilisé la règle de cosinus pour résoudre un triangle :**

On peut utiliser la règle de cosinus pour résoudre un triangle en connaissant :

- les longueurs de deux côtés et la mesure de l'angle compris entre eux.
- les longueurs de ses trois côtés.

6 **Aire d'un triangle :** la moitié du produit des longueurs de deux cotés par la sinus de l'angle compris entre eux.

$$A(\triangle\ ABC) = \frac{1}{2}\ a\ b \sin C = \frac{1}{2}\ b\ c \sin A = \frac{1}{2}\ c\ a \sin B.$$



Exercices généraux



Complétez ce qui suit :

1. Dans un triangle, les longueurs des côtés sont proportionnels aux ....
2. On peut utiliser la loi des cosinus pour calculer la longueur d'un côté d'un triangle en connaissant ....
3. Le côté qui est la plus grande longueur est opposé ....
4. On peut utiliser la loi des sinus pour calculer la longueur d'un côté d'un triangle en connaissant ....
5. Dans un triangle ABC, si on connait a, b et m($\hat{A}$) on utilise la loi du .... pour calculer m($\hat{B}$).
6. Dans un triangle XYZ, si on connait y, z et m($\angle$x) on utilise la loi du .... pour calculer x
7. Dans un triangle LMN, si on connait ℓ, m et n, on utilise la loi du pour calculer .... m($\angle$L)

Choisissez la bonne réponse des réponses données:

8. XYZ est un triangle tel que x = 15 cm, y = 25 cm et z = 35 cm, alors la mesure du plus grand angle du triangle est égale à
   - a) 150°
   - b) 120°
   - c) 40°
   - d) 90 °
9. ABC est un triangle tel que a = 4 cm , b = 7 cm et m($\angle$C) = 120°, alors son aire :
   - a) $14 cm^2$
   - b) $7\sqrt{3}\ cm^2$
   - c) $28 cm^2$
   - d) $7\sqrt{2}\ cm^2$
10. XYZ est un triangle équilatéral de $10\sqrt{3}$ cm de côté, alors la longueur du dimètre du cercle circonscrit au triangle =
    - a) 5cm
    - b) 10cm
    - c) 15cm
    - d) 20cm
11. La longueur du rayon du cercle circonscrit au triangle XYZ égale à 5cm et m($\angle$X) = 30°, alors x est égale à :
    - a) 10 cm
    - b) 5cm
    - c) 15cm
    - d) 20cm
12. ABC est un triangle tel que a = 5 cm ; b = 7 cm et c = 8 cm, alors m($\angle$B) =
    - a) 30°
    - b) 60°
    - c) 45°
    - d) 120 °
13. ABC est un triangle tel que a = 3 cm ; b = 5 cm et c = 7 cm, alors la mesure du plus grand angle du triangle:
    - a) 30°
    - b) 60°
    - c) 45°
    - d) 120 °
14. **Une question ouverte:** Tracez un triangle quelconque, déterminez trois éléments qui contient au moins la longueur d'un côté de ce triangle, puis déterminez les trois autres éléments.
15. a) ABC est un triangle tel que a = 8 cm, b = 15 cm et c = 17 cm. Calculez m($\angle$C)
    b) ABC est un triangle tel que a = 8 cm, b = 15 cm et c = 18 cm. $\angle$C est un angle aigu ou obtus? pourquoi ?

(16) ABCD est un parallélogramme dans lequel AB = 19.77 Les diagonales $\overline{AC}$ et $\overline{BD}$ forment deux angles avec son côté $\overline{AB}$ qui sont 36° et 44° . Calculez les longueurs des diagonales.

(17) ABCD est un quadrilatère tel que AB = 27 cm, BC = 12 cm, CD = 8 cm, DA= 12 cm et AC = 18 cm. Démontrez que $\overline{AC}$ est une bissectrice de $\angle$ BAD.

(18) Le périmètre du triangle ABC est 80,4 cm, ($\angle$ A) = 52° 17' et m($\angle$ B) = 77° 6' calculez les longueurs des côtés du triangle.

(19) ABC est un triangle tel que c = 7,6 cm, m ($\angle$A) = 80°, m($\angle$ B) = 47°, calculez le périmètre du triangle et la longueur du rayon du cercle circonscrit au triangle.

(20) ABCD est un parallélogramme de centre M, AC = 16 cm , BD = 20 cm et m($\angle$ AMB) = 54° Calculez la longueur du $\overline{AD}$ à un centimètre pres .

(21) ABC est un triangle tel que BC = 20 cm et m($\angle$B) = 29°, m($\angle$ C) = 73°, D D est le milieu de $\overline{BC}$, Calculez les longueurs de $\overline{AB}$ et de $\overline{AD}$ à deux décimales près.

(22) ABC est un triangle tel que AC = 4,7 cm, m($\angle$B) = 34 ° et m($\angle$C) = 66°, Calculez la longueur $\overline{BC}$ et le périmètre du cercle circonscrit au triangle ABC.

(23) ABC est un triangle tel que cos A = b = 2,5 cm et c = 2 cm. Démontrez que ABC est untriangle isocèle.

(24) ABC est un triangle tel que a : b : c = 4 : 5 : 6 . Déterminez cos A.

(25) Résoudre le triangle ABC dans lequel b = 11 cm, m($\angle$A) = 67° et m ($\angle$B) = 46 °en approchant les longueurs des côtés à un cm près

(26) Résoudre le triangle ABC dans lequel a = 13cm, c = 15cm , m($\angle$A) = 53° 8'

(27) Le périmètre du parallélogramme ABCD est 30 cm, le rapport entre les longueurs de deux côtés adjacents est 3 : 2 et m($\angle$ ADC) = 60° Calculez la longueur $\overline{AC}$.

(28) ABCD est un trapèze où AD \\ BC , AD = 26.3 cm, CD = 38.4 cm, AC = 51.7 cm et m ($\angle$BAD) = 103° 15' Calculez la longueur de $\overline{BC}$.

(29) **En le lien avec le sport :** Ahmed marche une distance de 8 km dans une certaine direction, puis il tourné d'un angle de mesure 80°, ensuite il marche une distance de 9 km, Quelle est la distance entre le point de départ Ahmed le point d'arrive?

(30) **En le lien avec le sport :** Dans un matche de football, le joueur de milieu de terrain; se trouve à 20 mètres de l'ailier droite. Il tourne un angle de mesure 40° et il a vu l'ailier gauche se trouvant à 16 mètres. Quelle est la distance entre les deux ailiers?

(31) **En le lien avec le transport :** Ahmed prend son moto pour se déplacer du point A au point B, puis au point C à une vitesse 25 km/h, puis il a rentré du point C au point A directement à une vitesse 60 km/h. Déterminez le temps pris dans cette parcours en approchant le résultat à dixième près de la minute.

 **Épreuve cumulative** 

Questions à choix multiples

1 Sans utiliser une calculatrice: la valeur de cos 120° est

a) $-\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

2 Laquelle parmi les angles suivants a la sinus et la cosinus sont négatives ?

a) 75° b) 135° c) 265° d) 330°

3 Si $\sin\theta = 46$ alors la mesure en degrés de l'angle θ est égale à:

a) 27.39 b) - 0.008 c) 0.008 d) 27.39

4 La relation reliant entre $\tan\theta$ et $\sec\theta$ est :

a) $\tan^2\theta - 1 = \sec^2\theta$ b) $\sec^2\theta - 1 = \tan^2\theta$ c) $\tan^2\theta - \sec^2\theta = 1$ d) $\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$

5 ABC est un triangle telque m(∠A) = 60° , a = $\sqrt{3}$ cm la longueur du rayon du cercle circoscrit au triangle ABC égale à:

a) 2cm b) $\sqrt{3}$ cm c) $2\sqrt{3}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ cm

6 Dans un triangle MNL, l'expression = $\frac{m^2 + n^2 - \ell^2}{2\,mn}$

a) cos L b) cos M c) sin L d) sin N

7 Dans un triangle ABC, b est égale à

a) $\frac{c \sin B}{\sin C}$ b) $\frac{c \sin C}{\sin B}$ c) $\frac{c \sin B}{a}$ d) $\frac{c \sin C}{a}$

8 Dans un triangle ABC, si a = 12, b = 28 , c = 20 alors m(∠B) = ...

a) 30° b) 60° c) 120° d) 150°

Questions à réponses courtes :

9 Sans utiliser une calculatrice, trouvez la valeur de :

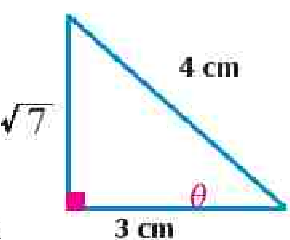
a) $\cos 2\pi$ b) tan 135° c) sin 330° d) $\sec\frac{7\pi}{6}$

10 Trouvez la valeur exacte de:

a) sin (-300)° b) sin 45° × cos 210° c) $\cos(\frac{7\pi}{6})$ d) $\sin\frac{3\pi}{2}\ \cos\frac{3\pi}{2}$

11 Dans le triangle XYZ si x = 10 cm, m(∠X) = 30°, m(∠Y) = 45° , trouvez y .

12 ABC est un triangle dans lequel a = 4 cm , b = 5 cm et c = 6 cm. Calculez la mesure de son plus grand angle puis déterminez son aire..

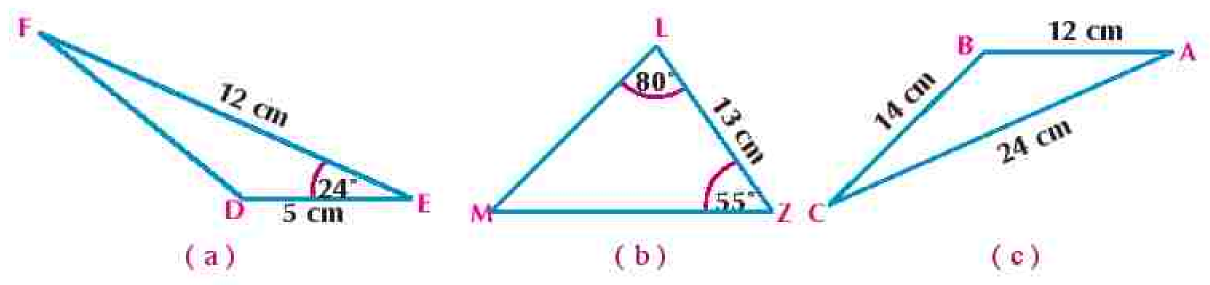


13 Dans la figure ci-contre : utilisez les les longueurs données pour vérifier que :

a $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ **b** $\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$

Questions à réponses longues :

14 Résolvez les triangles suivants en arrondissant les longueurs à un dixième prés et les mesures des angles à un degré près.



15 Si XYZ est un triangle tel que $m(\angle X) = \frac{2}{3}\, m(\angle Y) = \frac{1}{2}\, m(\angle Z)$, et le rayon du cercle circonscrit au triangle est égale à 10 cm. Calculer le périmètre du triangle XYZ.

16 Résoudre le triangle ABC tel que a = 12 cm, $m(\angle C) = 66°$ et c = 5cm en arrondissant la longueur à un centimètre près et la mesure de l'angle à un degré près.

17 ABCD est un quadrilatère dans lequel AB = 8 cm, AD = 10 cm, $m(\angle A) = 82°$, BC = 12 cm et $m(\angle CBD) = 68°$, Trouvez la longueur de $\overline{CD}$ à un centimètre près.

18 **En lien avec l'histoire :** La grande pyramide de Chéops est le monument le plus polémique et qui fait appel à l'imagination, elle est considérée comme une transféré de civilisation dans l'histoire de l'Ancien Egypte. Les ingénieurs à l'époque ont pâti les faces sous forme d'un triangle équilatérale de 230 mètres de cotés. Trouvez la longueur de la hauteur de la face à un mètre près.



Vous pouvez servir du tableau ci-joint dans le cas de difficulté de répondre à une question

No	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Referez à	Competence anterieures	Competence anterieures	Competence anterieures	Competence anterieures	113	122	114	125	Competence anterieures	Competence anterieures	112	123	Competence anterieures	Competence anterieures	113	111	112	126

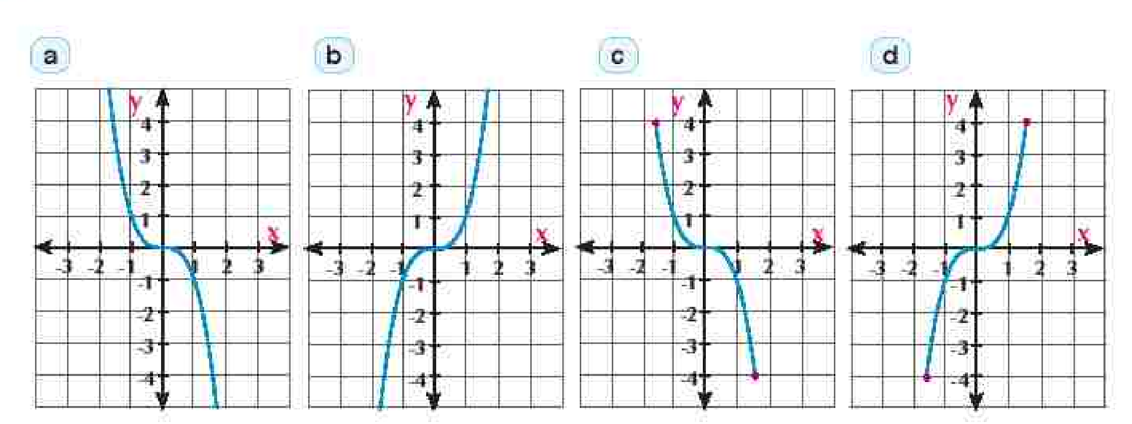
Epreuves générales

Épreuve (1) Algèbre

Répondez aux questions suivantes:

Question (1): Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées.

1. Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ où $f(x) = x^3$, la figure qui représente la fonction f est :



2. Si $5^{x-3} = 4^{3-x}$, alors $x =$

   a $\frac{5}{4}$　　b 3　　c $\frac{4}{5}$　　d 0

3. L'ensemble image de la fonction $f(x) = |x|$ est

   a $[0,+\infty[$　　b $]0, +\infty[$　　c $]-\infty , 0]$　　d $]-\infty , 0[$

4. Si $f(x) = 5^x$, alors $f(-2) =$

   a -2　　b 5　　c $\frac{1}{25}$　　d $\frac{1}{5}$

Question (2):

1. Soit f est une fonction telle que $f(x) = \frac{1}{x}$ trouvez l'ensemble image de la fonction et le centre de symétrie de la courbe de la fonction puis déterminez l'ensemble des solutions de l'équation $f(\frac{1}{x}) = 4$

2. Tracez la courbe représentative de f telle que :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } -5 \leqslant x < 2 \\ 6 - x & \text{si } 2 \leqslant x \leqslant 5 \end{cases}$$

   Du graphique : déterminez l'ensemble image et le sens de variation de la fonction.

Question (3):

1. Tracez la courbe représentative de la fonction telle que $f(x) = |x - 3|$ en déduisez : l'ensemble image, le sens de variation et la parité de la fonction.
2. Trouvez dans R l'ensemble des solutions de chacun de ce qui suit :

   a) $|x - 3| > 5$ b) $|x - 3| = 0$

Question (4):

1. Trouvez dans R l'ensemble solution de chacune des équations suivantes :

   a) $\log x = \log 3 + \log 10$ b) $9^x - 3 \times 3^x = 0$

2. **Simplifiez:**

   a) $\frac{4^{2n-1} \times 2^{1-n}}{8^{n+2}}$ b) $\log_6 54 - \log_6 9$

Épreuve (2) Algèbre

Répondez aux questions suivantes:

Question (1): Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées.

1. L'ensemble des solutions de l'inéquation $|x| - 1 > 0$ est:

   a) R - [-1; 1] b)]-1; 1[c) R -]-1 ; 1[d) [-1; 1]

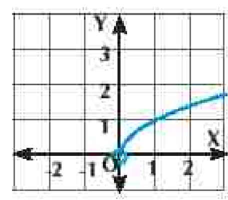
2. Si $4 = \log_2 x$,alors la forme exponentielle équivalente est :

   a) $x^2 = 4$ b) $x^4 = 2$ c) $x = 16$ d) $x = 8$

3. L'ensemble de définition de la fonction représentée dans la figure ci-contre est :

   a) [0;∞ [b)] 0;∞ [

   c) [0; 1] d)]0; 2[



4. Laquelle parmi les fonctions suivantes représente une croissance exponentielle sur son ensemble de définition:

   a) $y = 3\,(1.05)^x$ b) $y = 3\,(\frac{1}{1.05})^x$ c) $y = 3 + (0.5)^x$ d) $y = (\,0.05)^x$

Question (2):

1. Si $f(x) = |x - 3| + |x + 2|$, démontrer que $f(2) = f(-1)$

2. Utilisez la courbe représentative de la fonction $f(x) = x^2$ pour tracer la courbe de chacune des fonctions suivantes :

   a. $f_1(x) = x^2 - 3$ b. $f_2(x) = (x + 1)^2$

Question (3):

1. Trouvez dans R l'ensemble solution de chacune des équations suivantes :

   a. $\log_2 x + \log_2(x + 1) = 1$ b. $3^x + 3^{1-x} = 36$

2. a. Trouvez dans $\mathbb{R}$ l'ensemble solution de l'équation: $4^x + 2^{x+1} = 8$

   b. Sans utilisez la calculatrice, démontrez que: $\log_6 8 + \log_6 27 = \log_3 27$

Question (4):

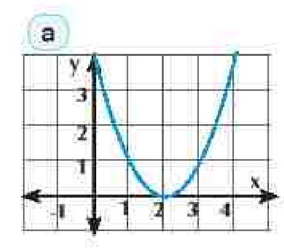
1. Trouvez dans $\mathbb{R}$ l'ensemble solution de l'inéquation suivante : $|x| + 1 < 2$
2. Tracez la courbe représentative de la fonction f telle que $f(x) = \frac{1}{x} - 1$
   en déduisez : l'ensemble image, le sens de variation et la parité de la fonction.

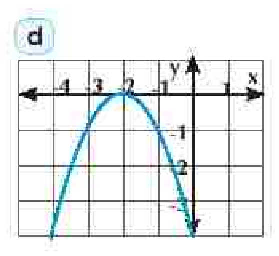
Épreuve (3) Algèbre

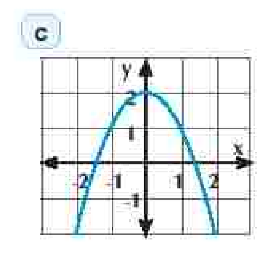
Répondez aux questions suivantes:

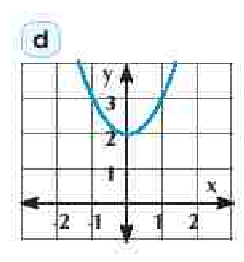
Question (1): Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées.

1. Si f est une fonction telle que $f(x) = x^2 + 2$, alors elle est représentée par le graphique :

a 

d 

c 

d 

2. L'ensemble solution de l'équation $\log_3 |x| = 1$ est :

   a. {3} b. {-3} c. {3; -3} d. {1; -1}

3. Si $5^{x-2} = 1$, alors x =

   a. 5 b. 2 c. -2 d. 1

4) La fonction f telle que $f(x) = \frac{2|x|}{x}$ est équivalente à la fonction : $f(x) =$

a) $\begin{cases} 2 & \text{si } x > 0 \\ -2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ b) 2 c) -2 d) $\begin{cases} 2 & \text{si } x \geqslant 0 \\ -2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Question (2):

1) Utilisez la courbe représentative de la fonction $f(x) = x^2$ pour tracer la courbe de la fonction $g(x) = f(x) + 2$, du graphique trouvez l'ensemble image de la fonction g et montrez qu'elle une fonction paire.

2) Déterminez, algébriquement l'ensemble des solutions de :

a) $\sqrt{x^2 - 6x + 9} < 5$ b) $|x + 5| = |x - 3|$

Question (3):

1) a) Trouvez la valeur de x qui vérifie l'équation $3^x = 25$ en arrondissant le résultat à deux décimales près.

b) Trouvez la forme la plus simple $\frac{1 - \log 2}{\log 125}$

2) En utilisant la calculatrice, trouvez la forme la plus simple de l'expression :
$\frac{1}{\log_2 30} + \frac{1}{\log_3 30} + \frac{1}{\log_5 30}$

Question (4):

1) Utilisez la courbe représentative de la fonction $f(x) = |x|$ pour tracer la courbe de la fonction $g(x) = |x - 1| - 2$, du graphique trouvez l'ensemble image de la fonction g et l'équation de l'axe de symétrie.

2) Étudiez la parité de chacune des fonctions suivantes :

a) $f(x) = x + \sin x$ b) $f(x) = x^3 - 2x^2$

Épreuve (4) Algèbre

Répondez aux questions suivantes:

Question (1): Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées.

1) L'ensemble image de la fonction $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geqslant 0 \\ -1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ est :

a) {0} b) {-1} c) R d) {0; -1}

2. La fonction f est telle que $f(x) = a^x$ est décroissante sur $\mathbb{R}$ si :

   a) $a = 1$ b) $a > 1$ c) $0 < a < 1$ d) $a = -1$

3. Les coordonnées du sommet de la courbe de la fonction f telle que $f(x) = x^2 + 1$

   a) (1 ; 0) b) (-1 ; 0) c) (0; 1) d) (0 ; -1)

4. Si $f(x) = 2^x$, alors $f(-1) =$

   a) -1 b) 1 c) $\frac{1}{2}$ d) $-\frac{1}{2}$

Question (2):

1. Tracez les courbes représentative des fonctions f et g où $f(x) = x + 1$ et $g(x) = 1 - x$. Du graphique trouvez l'aire de la partie triangulaire limitée par les deux droites et l'axe des abscisses.

2. Déterminez l'ensemble de solutions de chacune des equation et inequation suivantes :

   a) $|x - 1| = 4$ b) $2\,|x - 3| \leqslant 5$

Question (3):

1. Mettez sous la plus simple forme :

   a) $\dfrac{16^{x+\frac{1}{4}} \times 9^{x+2}}{8^{x-1} \times 18^{x+2}}$ b) $\log_{16} 7 \times \log_{49} 2$

2. Trouvez l'ensemble de définition des fonctions suivant :

   a) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 9}$ b) $g(x) = \sqrt{x + 2}$

Question (4):

1. Tracez la courbe représentative de la fonction telle que $f(x) = x^3 - 1$ en déduisez : les coordonnées du centre de la symétrie de la courbe et la parité de la fonction.

2. Trouvez dans $\mathbb{R}$ l'ensemble solution de deux équations suivantes :

   a) $2^{x+1} = 3^{x-2}$ b) $\log_3 x + \log_3(x + 2) = 1$

Épreuve (5) — Algèbre

Répondez aux questions suivantes:

Question (1): Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées.

1. $\log 2 + \log 5 =$
   - a) 1
   - b) log7
   - c) log 2.5
   - d) 10

2. Le nombre d'axes de symétrie de la fonction f telle que $f(x) = 5$ est
   - a) (1; 1)
   - b) (0 ; 0)
   - c) (1; 0)
   - d) (0 ; 1)

3. L'ensemble de définition de la fonction $f(x) = \log 3\,(x-2)$ est $x > 0$
   - a) 3
   - b) 5
   - c) 1
   - d) 2

4. Si $f(x) = 2$; alors $f(2x) =$
   - a) 2
   - b) 4
   - c) 0
   - d) 1

Question (2):

1. Tracez la courbe représentative de la fonction telle que:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & -1 \leqslant x < 2 \\ 5 - x & 2 \leqslant x \leqslant 5 \end{cases}$$

En déduisez : l'ensemble image, le sens de variation et la parité de la fonction.

2. Trouvez l'ensemble solution, dans R de :
   - a) $|x - 1| = |x + 2|$
   - b) $\sqrt{x^2 - 2x + 1} \leqslant 4$

Question (3):

1. Si $f(x) = 2^{x+1}$ Trouvez l'ensemble solution de ce qui suit :
   - a) $f(x) = 32$
   - b) $f(x - 2) = \frac{1}{8}$

2. **Trouvez la valeur de x dans chacun des cas suivant :**
   - a) $3^x \times 4^{-x} = \frac{9}{16}$
   - b) $x = \log_2 98 + \log_2 \frac{1}{7} - \log 7$

Question (4):

1. Tracez la courbe représentative de la fonction telle que $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x > 0 \\ |x| & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$

en déduisez : l'ensemble image, le sens de variation et la parité de la fonction.

2) Si $f(x) = x^2 \, |x|$ étudiez la parité de la fonction puis trouvez l'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = 1$.

Épreuve (6) Calcul différentiel et trigonométrie

Répondez aux questions suivantes:

Question (1): Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées.

1) Dans un triangle ABC a = b = 8 cm et le périmètre du triangle ABC = 26 cm, alors m($\angle$C) $\simeq$ ....

a) 35.3° b) 52.3° c) 77.4° d) 108°

2) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} =$

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3

3) Dans un triangle ABC m($\angle$ A) = 30° et a = 6 cm alors $\dfrac{b}{\sin B} =$

a) 3 b) 6 c) $\dfrac{1}{5}$ d) 12

4) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^5 - 1}{x - 1} =$ ....

a) 5 b) 1 c) 4 d) 20

Question (2):

1) **Calculez les limites suivantes:**

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x^4 + 3x^2 - 6}{2x + x^4}$ b) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x + 2}{x - 3}$

2) Dans un triangle ABC : $\frac{1}{2}\sin A = \frac{1}{3}\sin B = \frac{1}{4}\sin C$ trouvez la mesure du plus grand angle

Question (3):

1) **Calculez les limites suivantes :**

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4 - 3x^2}{\sqrt{x^4 + 5}}$ b) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x+1} - 2}{x - 3}$

2) ABC est triangle dans lequel a = 8 cm , b = 6cm , m($\angle$ C) = 48° , trouvez son périmètre

Question (4):

1. **Calculez les limites suivantes:**

   a) $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 6x + 9}{x - 3}$ b) $\lim_{x \to 2} \frac{2x^2 - 8}{x - 2}$

2. **Trouvez la longueur du rayon du cercle circonscrit au $\triangle ABC$ dans les deux cas suivants:**

   a) $m(\angle A) = 75°$, $a = 21$ cm

   b) $m(\angle B) = 50°$, $m(\angle C) = 65°$, $c - b = 6$cm

Épreuve (7) Calcul différentiel et trigonométrie

Répondez aux questions suivantes:

Question (1): Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées.

1. Dans le triangle LMN : $\frac{\ell}{\sin L}$ est égale à

   a) $\frac{m}{\sin N}$ b) $\frac{n}{\sin M}$ c) $\frac{m + n}{\sin N + \sin M}$ d) $3r$

2. $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 1}}{x - 2} =$

   a) 4 b) 5 c) $\frac{5}{-2}$ d) 2

3. $\lim_{x \to 0} (2x^2 + 3) =$

   a) 2 b) 3 c) 5 d) 7

4. Si ABC est un triangle tel que $2 \sin A = 3 \sin B = 4 \sin C$ alors $a : b : c =$

   a) 2 : 3 : 4 b) 4 : 3 : 2 c) 3 : 4 : 6 d) 6 : 4 : 3

Question (2):

1. **Calculez les limites suivantes:**

   a) $\lim_{x \to 2} \frac{x^5 - 32}{x - 2}$ b) $\lim_{x \to 1} \frac{(x - 2)^4 - 1}{x - 1}$

2. Soit ABCD un parallélogramme tel que AB = 7 cm , les diagonales $\overline{AC}, \overline{BD}$ forment avec $\overline{AB}$ des angles de mesures 65° et 28° respectivement. Trouvez les longueurs de $\overline{BD}$ et $\overline{AC}$

Question (3):

1. Calculez les limites suivantes :

a $\lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 27}{x^2 - 9}$ b $\lim_{X \to \infty} \frac{4x^2 + 1}{x^2 - 2}$

2. Soit ABCD un quadrilatère tel que AB = 9 cm, BC = 5 cm, CD = 8 cm, da = 9 cm et AC = 11 cm, Démontrez que ABCD est un quadrilatère inscriptible.

Question (4):

1. **Calculez les limites suivantes:**

a $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 5x - 6}{x^2 - 1}$ b $\lim_{x \to 1} \frac{(x+1)^5 - 32}{x - 1}$

2. ABC est un triangle tel que $\cos A = \frac{2}{5}$, $b = 2\frac{1}{2}$, c = 2cm. Démontrez que ABC est un triangle isocèle.

Épreuve (8) Calcul différentiel et trigonométrie

Répondez aux questions suivantes:

Question (1): Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées.

1. Dans △ ABC si a = 7 cm alors b =

a $\frac{7 \sin A}{\sin B}$ b $\frac{7 \sin B}{\sin A}$ c $\frac{\sin A}{7 \sin B}$ d $\frac{\sin C}{7 \sin B}$

2. $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{x} =$

a 0 b 1 c 2 d -1

3. $\lim_{x \to +\infty} \frac{2 + x}{x} =$

a 2 b 0 c 3 d 1

4. Dans △ ABC si $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$ alors $\frac{2 \sin A - \sin B}{} = \frac{\sin A}{a}$

a a + b b 2 a + b c a - 2 b d 2 a - b

Question (2):

1. a Si $\lim_{x \to 2} \frac{a}{x + 1} = 4$ trouvez la valeur de a b Si $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x + 4} - 2}{x}$

2. Résolvez le triangle ABC tel que a = b = 12 cm, c = 8 cm

Question (3):

① Calculez les limites suivantes

a $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 3x}{x + 1}$

b $\lim_{x \to +\infty} (\frac{3}{x} + \frac{2x^5 + 1}{x^2(x^3 + 2)})$

② ABC est un triangle dans lequel m(∠ A) = 22° 37' , m(∠ B) = 67° 23' et son périmètre 30 cm. Calculez a et b à un centimètre près

Question (4):

① **Calculez les limites suivantes**

a $\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 2x + 1}{x^2 - 1}$

b $\lim_{x \to 1} (\frac{1}{x} + 3)$

② ABC est un triangle dans lequel m(∠B) = 35° , m(∠ C) = 70° et la longueur du rayon de son cercle circonscrit = 30 cm. Calculez l'aire et le périmètre du triangle à un entier près.

Épreuve (9) Calcul différentiel et trigonométrie

Répondez aux questions suivantes:

Question (1): Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées.

① Dans un triangle ABC on a cos A=

a -(cos B + cos C) b cos B − cos C

c cos (B + C) d - cos (B +C)

② $\lim_{x \to 1} (\frac{3}{4}) =$

a 3 b 4 c $\frac{3}{4}$ d 1

③ $\lim_{x \to -2} \frac{3x^2 - 12}{x + 2} =$

a 18 b -3 c 12 d -12

④ Dans un triangle ABC , l'expression $\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2\,ab}$ est égale à $-\frac{1}{2}$ si :

a m(∠ A) = 60° b m(∠B) = 90°

c m(∠C) = 120° d m(∠A) + m(∠ B) = 90

Question (2):

1. ABCD est un parallélogramme dans lequel AC = 10 cm, BD = 8 cm Si les diagonales et $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ se coupent en M et m($\angle$ AMB) = 70° , trouvez le périmètre du parallélogramme.

2. Calculez les limites suivantes:

   a) $\lim\limits_{x \to +\infty} X(\sqrt{4x^2+1} - 2x)$

   b) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2+3x+2}{x+1}$

Question (3):

1. **Calculez les limites suivantes :**

   a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^5 - 32}{x^2 - 4}$

   b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3x+7}{x^2+2x-5}$

2. Trouvez la mesure de plus petit angle du triangle ABC sachant que a = 25cm , b = 20 cm, c = 28 cm

Question (4):

1. **Calculez les limites suivantes**:

   a) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \dfrac{x^3 - \frac{1}{8}}{x^2 - \frac{1}{4}}$

   b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\dfrac{1-x}{1-4x}}$

2. Dans $\triangle$ABC m($\angle$ A) = 36°, m($\angle$ C) = 45° et b = 9 cm Trouvez c et l'aire du cercle circonscrit au triangle.

Épreuve (10) Calcul différentiel et trigonométrie

Répondez aux questions suivantes:

Question (1): Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées.

1. Dans le triangle XYZ, l'expression $\dfrac{x^2+y^2-z^2}{2xy}$ est égale à :

   a) cos X   b) sin Y   c) cos Z   d) sin Z

2. Si $\angle$ A est le supplémentaire de $\angle$ C alors cos A + cos C =

   a) 0   b) 1   c) -1   d) $\frac{1}{2}$

3) $\lim_{x \to -1} (3x^2) =$

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5

4) $\lim_{x \to -2} \frac{1}{|x|} =$

a) 1 b) -1 c) $\frac{1}{2}$ d) $-\frac{1}{2}$

Question (2):

1) Trouvez la mesure de plus petit angle du triangle XYZ sachant que $x = 27$ cm , $y = 35$ cm et $z = 18$ cm

2) Calculez les limites suivantes :

a) $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 1}$ b) $\lim_{x \to +\infty} \frac{(x+1)(5x-3)}{x^2 + 3}$

Question (3):

1) Trouvez la mesure de plus grand angle du triangle dont les longueurs des cotés sont 7 cm , 8 cm et 9 cm.

2) Calculez les limites suivantes:

a) $\lim_{x \to 3} \frac{(x-6)^2 - 9}{x^2 - 9}$ b) $\lim_{x \to -1} \frac{2x^3 - x^2 - 2x + 1}{x^3 + 1}$

Question (4):

1) Résolvez le triangle ABC dans lequel $m(\angle A) = m(\angle B)$, $m(\angle C) = 80°$ et $c = 15$cm

2) Calculez les limites suivantes:

a) $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{9x + 4} - 2}{x}$ b) $\lim_{x \to 1} \frac{x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{1}{2}}}{x^2 - x}$

Réponses de quelques exercices

Unité (1) Fonctions réelles et tracé des courbes

Réponses de quelques exercices de la leçon (1)

(1) La relation qui représente une fonction est d

(6) a $\mathbb{R}$;]-∞ ; 4] b $\mathbb{R}$;]-2; ∞[
c $\mathbb{R}$ - {0} ; $\mathbb{R}$ - {0}
d]-∞ ; 4]- {2}]-∞ ; 8[

(7) L'ensemble image =] 1; 3] ∪ {-1}

Réponses de quelques exercices de la leçon (2)

(2)

fig	E.D	E.I	S. de variation
a	$\mathbb{R}$	]- ∞; 2]	]-∞; 0[croissante ;]0;∞[constante
b	$\mathbb{R}$	[-4;+∞ [	]-∞; 0[croissante ;]0;+∞ [croissante
c	]-∞; 6]	]-∞; 2]	]-∞; -4[croissante ;]-4; 4[constante;]4; 6] décroissante
d	$\mathbb{R}$ - {1}	$\mathbb{R}$ - {-2}	]- ∞; 1[décrossante ;]1; +∞[décrossante
e	$\mathbb{R}$ - {- 1}	[-2; ∞[	]-∞; - 1[décrossante ;]-1;+∞ [constante
f	$\mathbb{R}$ - {0;2}	]0; ∞[	]-∞ ; 2[croissante ;]2;+∞ [décroissante

Réponses de quelques exercices de la leçon (3)

(2) fonctions paires (c), (d)
fonctions impaires b, e, f
fonctions ni est paire ni impaires : (a)

(3) fonctions paires : (a)
fonctions impaires : (b); (c)
fonctions ni paires ni impaires : (d); (e)

(4) fonctions paires : (c)
fonctions impaires : (a); (d)
fonctions ni paires ni impaires : (b)

Réponses de quelques exercices de la leçon (4)



fig	E.I	S. de variation
A	[0;+∞[	décroissante sur]-∞ ; 0[; croissante sur]0 ; +∞[
B	[0;∞ [	Croissante sur]-∞, -2[; croissante sur]-2; 0[; constante]0;∞ [
C	]-∞; 1[	Croissante sur]-∞; 1[; Constante sur]1;+∞ [
D	$\mathbb{R}$ - {0}	Décroissante sur]-∞; 0[; croissante sur]0;+∞ [

(2) c (3) b (4) a (5) b
(6) c
(7) g (x) = (x - 4)² ; h(x) = x² - 2; i(x) = (x + 4)² - 3
(8) g (x) = (x - 3)³ ; h (x) : x³ - 4 ; i (x) : (x + 4)² - 1
(9) g (x) : |x - 3| ; h (x) : |x| - 2 ; i (x) : |x + 3| + 2

Réponses de quelques exercices de la leçon (5)

(1) $\{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\}$ (2) φ
(3) {2} (4) C
(5) a (6) B
(7) f (8) d
(9) e (10) {-9; 3}
(11) {1; 6} (12) { -2; 5}
(13) {1} (14) { -4; 1}
(15) { -3; 5} (16) { -1; -7}
(17) { -1 (18) { 1; 4}
(19)] -2; 4[(20) [-3; 7]
(21) $\mathbb{R}$ - [-5; -1] (22) $\mathbb{R}$ - [-1; 2]
(23) [-5; 2] (24) $\mathbb{R}$ -] $\frac{5}{3}$; 3[
(25) | x -4| < 3 d'ou x =] 1 ; 7[
(26) | x - 38.5| < 3,5

Unité (2) Puissances et logarithmes

Réponses de quelques exercices de la leçon (1)

(1) a $x^{\frac{1}{3}}$ b $a^{\frac{1}{4}}$
c $2\,n^{\frac{1}{3}}$
d $a^{\frac{1}{2}}$ $B^{\frac{1}{4}}$ e $x^{\frac{5}{6}}$
f $x^{-\frac{1}{12}}$

Réponses de quelques exercices de la leçon (2)

(1) L'ensemble de définition est $\mathbb{R}$ dans le cas ou il ensemble de définition n'est pas donné
L'ensemble image de toutes les fonction es]0;∞ [
les fonction (a) ; (b) sont croissantes
les fonctions : (C) et (d) décroissances

(2) a (0,1) b (0,2)
c a = 3 d des et donnes
e]0; 1[f a > $\frac{1}{2}$

(3) a C = 43265341 (1+0.015)
b C = 58272141 habitants

(4) a C = ⁶10 (1 + 0.06)ⁿ
b C = ⁶10 (1 + 0.06)¹⁰
C ≃ 1790848 L.E

Réponses de quelques exercices de la leçon (3)

(1) a 3 b 2 c 1 d ±5
e 1
(2) b (3) d (4) c (5) b
(6) d (7) b

Réponses de quelques exercices de la leçon (4)

(2) a {10} b {123}
c {27}
d {15} e {2}
f {3}
(3) a 0 b 1 c 2
d 1
(5) a 1.176 b 4.755
c -2,189

Réponses de quelques exercices de la leçon (5)

(1) b (2) a

(3) c (4) a

(5) c (6) a

Réponses de quelques exercices des Exercices généraux

(1)

(a) ± 2 (b) 2 (c) $\frac{1}{2}$

(d) 3 (e)]0; 1[

(f) $y = \log_2 x$

(g) $y = (\frac{1}{3})^x$ (h) 1 (i) (0; 2)

(j) 1 (k) 1 (l) 1

(2)

(a) 3 (b) 0.1 (c) 2

(d) 4 (e) 1 (f) 3

(3)

(a) {(27; -27)} (b) {(-2)}

(c) {(3)} (d) {25}

(e) $\{\frac{-7}{3}\}$ (f) {0.26}

Réponses de quelques exercices de l'Epreuve accumulative

(1) (a) [2; ∞[(b) ℝ - {0}

(c) [2; ∞[

(3) (a) 1

(4) (a) 2 (b) $\frac{1}{9}$

(c) 1 (d) 0

(e) $\frac{3}{2}$ (f) 5

Unité (3) Limites

Réponses de quelques exercices de la leçon (1)

(1) Du graphique on trouve que

(a) $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$

(b) $f(0) = 1$

(2) **Du graphique on trouve que**

(a) $\lim_{x \to 3^-} f(x)$ n'existe pas

(b) $f(3) = 1$

Réponses de quelques exercices de la leçon (2)

(1) 10 (2) 0 (3) -1

(4) 4 (5) $5a^4$ (6) 12

(7) 3 (8) 32 (10) 32

(11) $\frac{3}{2}$ (12) 7

(13) n'a pas de limite

(14) -1 (15) 8

(18) $\lim_{x \to 3} (x^2 - 3x + 2)$
$= (3)^2 - 3(3) + 2 = 2$

Réponses de quelques exercices de la leçon (3)

(1) 1 (2) -2

(3) -7 (4) +∞

(5) 2 (6) +∞

(7) +∞ (8) 3

(9) 3 (10) 0

(11) 3 (12) 1

(13) 0 (14) ∞

Réponses de quelques exercices des Exercices généraux

(4) 1 (5) +∞

(6) 0

(7) $\lim_{x \to -2} \frac{x+7}{x+2}$ n'est pas définie

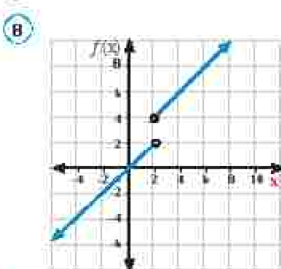
(9) $\lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 3^3}{x-3} = 3(3)^2 = 27$

(10) $\lim_{x \to 8} \frac{x^2 - 6x - 16}{x-8}$
$= \lim_{x \to 8} \frac{(x-8)(x+2)}{(x-8)}$
$= \lim_{x \to 8} (x+2) = 10$

(11) $\lim_{x \to 2} \frac{x^7 - 128}{x^3 - 8} = \lim_{x \to 2} \frac{x^7 - 2^7}{x^3 - 2^3}$
$= \frac{7}{3} \times (2)^{7-3} = \frac{7}{3} \times 2^4$
$= \frac{112}{3}$

Réponses de quelques exercices de l'Epreuve accumulative

(8)



D'apres la figures

$f(2^-) = 2$; $f(2^+) = 4$

$\therefore f(2^-) \neq f(2^+)$

$\lim_{x \to 2} f(x)$ n'existe pas

(11)

(a) $\lim_{x \to \infty} \frac{7x}{2x+5} = \lim_{x \to \infty} \frac{7}{2 + \frac{5}{x}} = \frac{7}{2}$

(b) $\lim_{x \to \infty} \frac{4x^2}{3-x} = \lim_{x \to \infty} \frac{4x}{\frac{3}{x} - 1} = \infty$

(c) $\lim_{x \to \infty} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{x} = 1$

Unité (4) Trigonométrie

Réponses de quelques exercices de la leçon (1)

(2) 20 cm (3) 11.3

(4) 4 (5) 30°

(6) $9\sqrt{3}$ cm² (7) a

(8) a (9) a

(10) b (11) c

(12) d

(13) (a) ≃ 7.4 cm

(b) ≃ 9.2 cm

(14) m(∠C) = 71° , b ≃ 5.9cm ; c ≃ 9.98cm

(15) m (∠B) ≃ 56° ; a ≃ 3.741cm ; b ≃ 9.527 cm

(16) m (∠B) ≃ 46° ; b ≃ 13.61cm ; c ≃ 5.845 cm

Réponses de quelques exercices de la leçon (2)

(1) -2 yz cos x ; $\frac{Y^2 + Z^2 - X^2}{2YZ}$

(2) 74° 23'

(3) 33° 44' (4) $2\sqrt{19}$cm

(5) 2 mn cos L (6) 120°

(7) cos N (20) ≃ 11.49cm

(21) ≃ 17.71cm

(22) (a) m (∠C) = 60°

(b) l'aire du triangle ABC = $\frac{15\sqrt{3}}{4}$

(23) m (∠ C) = 120°

Réponses de quelques exercices des Exercices généraux

(1) les sinus des angles qui sont lui opposé

(2) les longueurs des cotés ou les longueurs de deux cotés et la mesure de l'angle comprise

(3) le plus grand angle

(8) 2 (9) 2

(10) 4 (11) 2

Réponses de quelques exercices de l'Epreuve accumulative

(1) b (2) c

(3) a (4) d

(5) a (6) a

(11) $10\sqrt{2}$ cm

(12) $C \simeq 84°\ 1'\ 15''$; l'aire 9.95cm^2

Epreuves généraux

Epreuve 1

Question(1)

(1) b (2) b

(3) c (4) c

Question(2)

(1) D = ℝ - {0} ; (0 ; 0) E.S = {1}

(2) E.I = [-2 ; 25]

Décroissante sur]-5; 0[, croissante sur]0; 2[, Décroissante sur]2; 8[

Question(3)

(1) E.I = [0 ; +∞[Décroissante sur]-∞ ; 3[croissante sur]3 ; +∞[; ni paire ni impqire

(2) (a) E.I = ℝ -]- ; ∞ [(b) -3

Question(4)

(1) (a) 30 (b) E.S = {1}

(2) (a) $\frac{1}{8}$ (b) 1

Epreuve 2 :

Question(1)

(1) a (2) c

(3) b (4) a

Question(3)

(1) (a) {1} (b) {2}

(2) (a) {1}

Question(4)

(1)] -1; 1[

(2) E.D = ℝ - {0} ; E.I = ℝ - {-1}

Décroissante sur]-∞; 0[; décroissante sur] 0 ; +∞ [Ni paire ni impaire

Epreuve 3 :

Question(1)

(1) d (2) c

(3) b (4) a

Question(2)

(2) (a)]-2; 8[(b) {-1}

Question(3)

(1) (b) $\frac{1}{3}$

Question(4)

(2) (a) impaire

(b) ni paire ni impaire

Epreuve 4 :

Question(2)

(2) (a) {5, -3} (b) $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 5]$

Question(3)

(1) (a) 8 (b) $\frac{1}{8}$

Question(4)

(1) {0; 1} , n'est paire ni impaire

(2) (a) {7.129} (b) {1}

Epreuve 5 :

Question(1)

(1) a (2) B

(3) d (4) a

Question(3)

(1) (a) {4} (b) {-2}

(2) (a) {2} (b) {1}

Question(4)

(2) **paire** ; { 1; -1}

Epreuve 6 :

Question(2)

(1) (a) 5 (b) 0

(2) 104° 29'

Question(3)

(1) (a) -3 (b) $\frac{1}{4}$

(2) périmètres ≃ 20 cm

Question(4)

(1) (a) 0 (b) 8

Epreuve 7 :

Question(1)

(1) c (2) d

(3) b (4) d

Question(2)

(1) (a) 80 (b) 4

(2) 12.7cm ; 6.6 cm

Question(4)

(1) (a) $\frac{7}{2}$ (b) 80

Epreuve 8 :

Question(1)

(1) b (2) b

(3) d (4) d

Question(2)

(1) (a) 12 (b) $\frac{1}{4}$

Question(3)

(1) (a) 2 (b) 2

(2) 5cm ; 12cm

Question(4)

(1) (a) $\frac{1}{2}$ (b) 4

Epreuve 9:

Question(1)

(1) d (2) c

(3) d (4) d

Question(2)

(1) 25.24 m

(2) (a) $\frac{1}{4}$ (b) 1

Question(3)

(1) (a) 20 (b) -5

(2) m(∠ B) ≃ 43° 53'

Question(4)

(1) (a) $\frac{3}{4}$ (b) $\frac{1}{2}$

(2) 6.4 cm ; aire = 65.2 cm^2

Epreuve 10 :

Question(1)

(1) c (2) a

(3) b (4) c

Question(2)

(1) 30° 24'

(2) (a) $\frac{-1}{3}$ (b) 5

Question(3)

(2) (a) -1 (b) 2

Question(4) :

(1) A = b = 11.67 cm

ni paire ni impaire

(2) (a) $\frac{9}{4}$ (b) 1